

# 单元整体教学设计视角下的条件概率

田凯<sup>1</sup> 李俊岳<sup>1</sup> 胡典顺<sup>1</sup> 王晓宇<sup>2</sup>

(1. 华中师范大学数学与统计学学院, 430079; 2. 广东省深圳市高级中学, 518118)

**摘要:**条件概率是一个“承上启下”型的关键概念,在单元整体教学设计视角下剖析条件概率的概念、梳理其在知识体系中的地位,有助于对知识的整体理解和把握,是落实课程内容结构化理念的重要途径.对条件概率的教学建议是:单元整体设计,形成概念系统;回归概念教学,突出本质特征;推理严谨缜密,提升核心素养.

**关键词:**单元整体教学;条件概率;条件概率相关公式;事件的独立性;教学建议

## 1. 引言

《义务教育数学课程标准(2022年版)》提出“设计体现结构化特征的课程内容”的课程理念<sup>[1]</sup>,这是深化基础教育课程改革的重要导向,在中小学数学课程与教学改革中应引起充分的重视<sup>[2]</sup>.为落实该理念,在内容呈现上,中小学数学课程已根据知识之间的关联程度将课程内容整合成了若干个主题,这有助于更好地理解 and 掌握学科的基本原理、实现知识与方法的迁移和准确把握核心概念的进阶<sup>[2]</sup>;在教学实施上,需从关键内容入手进行单元整体教学设计,这有助于对知识的整体理解和把握,是落实课程内容结构化理念的重要途径.

概率与统计主题贯穿高中数学必修课程和选择性必修课程,条件概率上承必修教材中样本空间、随机事件、概率和古典概型等知识,下启选择性必修教材中概率的乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式、事件的独立性和独立性检验等知识,是一个“承上启下”型的关键概念.因此,在单元整体教学设计视角下,剖析条件概率的概念,梳理其在知识体系中的地位,十分有必要.

## 2. 知识理解

### 2.1 条件概率是概率吗?

从直观上看,条件概率只是附加了条件的概率,应该属于概率.但数学不能简单地望文生义,条件概率是不是概率要经过严格的论证.根据概率的公理化定义,概率是定义在事件域  $F$  上的一个集合函数  $P(\cdot)$ ,它的自变量是事件,因变量是实数,即对应于事件域  $F$  中的每一个事件  $A$  有唯一的一个实数

$P(A)$  与之对应,并且满足以下三个条件:

- (1) 非负性,对于每一个事件  $A$ ,有  $P(A) \geq 0$ ;
- (2) 规范性,对于必然事件  $\Omega$ ,有  $P(\Omega) = 1$ ;
- (3) 可列可加性,对于两两不相容的事件  $A_i, i = 1, 2, 3, \dots$ ,有  $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

不难证明,条件概率  $P(B|A)$  是一个集合函数  $P(\cdot|A)$ ,并满足非负性、规范性和可列可加性,所以条件概率是概率.因此,条件概率就具有概率的所有性质,例如  $P(\emptyset|A) = 0$ ;如果  $B$  和  $C$  是两个互斥事件,则  $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$ ;  $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$  等.尽管在中学教材中并不讲解概率的公理化定义,但是教师熟悉并深刻理解这个定义是十分必要的.

### 2.2 $B|A$ 是事件吗?

概率是对随机事件发生可能性的度量,  $P(B)$  表示事件  $B$  发生的概率,括号里面的  $B$  表示事件,这个理解合情合理.按照这个道理,既然  $P(B|A)$  也是概率,那括号里的  $B|A$  应该也是事件,这是很直观的想法.但是,在概率论中是将样本空间的子集称为事件,也就是说事件是一个集合.事件  $AB$ 、 $A$ 、 $B$  都是集合,所以它们都是事件,但  $B|A$  不是集合,所以它不是事件,把  $B|A$  作为一个整体符号看待是没有意义的<sup>[3]</sup>.如何解释这个问题呢?

其实,由  $P(B|\Omega) = \frac{P(B\Omega)}{P(\Omega)} = P(B)$  可知无条件概率是特殊的条件概率,条件概率是无条件概率的上位概念,上位概念  $P(B|A)$  表示在压缩后的样

基金项目:教育部人文社会科学研究规划基金项目——中小学核心素养测评的模型建构与实证研究(19YJA880012);中央高校基本科研业务费项目——新高考分省市命题分学科质量评价指标体系研究(CCNUTEI2021-13).

本空间  $A$  中事件  $AB$  发生的概率. 同样, 对于下位概念  $P(B)$  或  $P(B | \Omega)$ , 须理解为在原样本空间  $\Omega$  中事件  $\Omega B$  发生的概率, 由于  $\Omega B = B$ , 原样本空间  $\Omega$  也无须刻意强调, 故一般简单理解为事件  $B$  发生的概率. 这就解释了括号内的符号是事件只对无条件概率成立但对条件概率不成立的问题.

### 2.3 弄清三个概率

条件概率的定义是以公式的形式给出的, 这个公式包含  $P(B | A)$ ,  $P(AB)$  和  $P(A)$  等三个概率, 体现了条件概率与无条件概率之间的关系, 理解这三个概率自然就成了理解条件概率定义的关键. 从含义来看,  $P(B | A)$  表示在缩小的样本空间  $A$  中事件  $AB$  的概率,  $P(AB)$  表示在原样本空间  $\Omega$  中事件  $AB$  的概率,  $P(A)$  表示在原样本空间  $\Omega$  中事件  $A$  的概率. 从计算来看, 这三个概率的计算方法本质上并无差异. 首先, 以古典概型为例, 只需根据各自含义找到事件的样本点数和对应的样本空间的样本点数, 就可求出各自的概率, 有  $P(B | A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$ ,  $P(AB) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)}$ ,  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ . 其次, 若三个概率知其二, 就可以利用  $P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$  计算出另一个概率.

**问题 1**<sup>[4]</sup> 在 5 道试题中有 3 道代数题和 2 道几何题, 每次从中随机抽出 1 道题, 抽出的题不再放回. 求: 在第 1 次抽到代数题的条件下, 第 2 次抽到几何题的概率.

**解析** 设  $A$  = “第 1 次抽到代数题”,  $B$  = “第 2 次抽到几何题”.

解法 1: 因为  $P(AB) = \frac{A_3^1 A_2^1}{A_5^2} = \frac{3}{10}$ ,  $P(A) = \frac{3}{5}$ , 所以  $P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$ .

解法 2: 已知第 1 次已经抽到了代数题, 还剩余 4 道题, 其中 2 道代数题和 2 道几何题, 于是

$$P(B | A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

由此可知, 有时候, 合理运用问题的信息, 在压缩的样本空间中计算条件概率更方便.

### 3. 从条件概率到一系列公式

数学离不开运算, 概率论更是如此. 作为一门实际应用广泛的学科, 必然关注随机事件概率的大小, 这也导致运算成为该学科的重点研究课题. 条件概率在丰富概率运算方面的作用非同小可, 它催生了

概率的乘法公式, 激活了概率的加法公式, 导致全概率公式和贝叶斯公式的诞生, 这些公式使概率的运算有了强有力的工具.

#### 3.1 乘法公式

由条件概率的定义可以立即得到:

$$P(AB) = P(A)P(B | A) \text{ (当 } P(A) > 0 \text{ 时)},$$

$$P(BA) = P(B)P(A | B) \text{ (当 } P(B) > 0 \text{ 时)}.$$

又因为  $P(AB) = P(BA)$ , 所以

$$P(AB) = P(A)P(B | A) \text{ (当 } P(A) > 0 \text{ 时)}$$

$$= P(B)P(A | B) \text{ (当 } P(B) > 0 \text{ 时)}.$$

上式称为概率的乘法公式, 它给出了任意两个事件的“积事件”概率的一般性求法. 事实上, 还可以将它推广到求任意  $n$  个事件的“积事件”的概率, 即对于  $n$  个事件  $A_i (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2)$ , 若  $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ , 则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \cdot$$

$$P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

#### 3.2 加法公式

概率的加法公式  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$  给出了任意两事件的“和事件”概率的一般性求法, 但在学习条件概率之前, 如何求公式中“积事件”概率  $P(AB)$  是个难题, 条件概率催生了乘法公式, 给出了“积事件”概率的一般性求法, 为加法公式的使用扫清了障碍, 彻底激活了概率的加法公式.

#### 3.3 全概率公式

在乘法公式和加法公式的基础上, 可以进行以下推导:

设事件  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  两两互斥, 且  $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$ ,  $P(A_i) > 0$ , 则有  $B = \sum_{i=1}^n A_i B$ , 此时  $A_i B$  两两互斥. 由加法公式, 有  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i B)$ , 再利用乘法公式可得  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$ , 这就是全概率公式.

全概率公式的核心思想是把一个复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件之和, 再分别计算这些简单事件的概率, 然后利用概率的可加性得到最终结果. 它充分体现了化繁为简的数学思想, 大大简化了概率的运算.

#### 3.4 贝叶斯公式

在条件概率的定义、乘法公式和全概率公式的基础上, 还可以继续推导, 得到

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B | A_j)},$$

这就是贝叶斯公式. 如果把事件  $B$  看成是结果, 把事件  $A_i$  看成是导致这个结果的各种可能的原因, 那么全概率公式  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$  就可以看成是由各种原因推理出结果事件发生的概率, 是“由因推果”. 但在实际生活中经常需要根据某些已经发生的现象去反推造成该现象的各种原因的概率, 即“由果推因”, 这时候就需要运用贝叶斯公式. 可将  $P(A_i)$  称为先验概率, 它们在试验前已经知道了, 其值是根据先前的知识和经验确定的. 将  $P(A_i | B)$  称为后验概率, 表示在结果  $B$  已经发生的条件下推断结果  $B$  是由原因  $A_i$  造成的概率的大小, 它其实反映了在试验之后结果  $B$  已经发生的条件下对先验概率  $P(A_i)$  的一种修正. 换句话说, 如果事件  $B$  在一次试验中确实发生了, 那么这个信息必然要引起对先验概率  $P(A_i)$  的重新估计, 这个估计值即为后验概率  $P(A_i | B)$ . 贝叶斯公式正是定量地给出了这种重新估计的公式, 人们可以据此对事件的起因作出某些合理的判断<sup>[6]</sup>.

#### 4. 从条件概率到事件的独立性

##### 4.1 生成定义

将问题 1 由不放回抽题改成有放回抽题, 形成问题 2, 于是

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3}{5}, P(AB) = \frac{6}{25}, P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{4}{25}, \\ P(B) &= P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{6}{25} + \frac{4}{25} = \frac{2}{5}, \\ P(B | A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

此时  $P(B) = P(B | A)$ , 这说明事件  $A$  发生与否不影响事件  $B$  发生的概率. 从直观上很好理解, 因为问题中采用的是有放回抽题, 因此第二次抽题时题目的组成与第一次抽题时完全相同, 当然第一次抽题的结果不影响第二次抽得几何题的概率. 从而很自然地给出:

**定义 1** 一般地, 如果事件  $A$  是否发生对事件  $B$  发生的概率没有影响, 即  $P(B) = P(B | A) (P(A) > 0)$ , 我们称事件  $B$  独立于事件  $A$ .

当  $P(A) > 0, P(B) > 0$  时, 由概率的乘法公式,

$$\begin{aligned} P(B | A) &= P(B) \Leftrightarrow P(A | B) = P(A) \\ &\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B). \end{aligned}$$

首先, 这表明事件  $A$  独立于事件  $B$  时, 事件  $B$  也独立于事件  $A$ , 事件的独立关系具有对称性, 故通常称它们相互独立, 简称独立.

其次, 也可以得到:

**定理 1** 当  $P(A) > 0, P(B) > 0$  时, 事件  $A$  与事件  $B$  相互独立等价于  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

定理 1 的前提是  $P(A) > 0, P(B) > 0$ , 其实对于满足  $P(A) = 0$  或  $P(B) = 0$  的事件  $A$  与  $B$ ,  $P(AB) = P(A)P(B)$  也成立. 事实上, 不妨设  $P(A) = 0$ , 则  $P(A)P(B) = 0$ , 且由  $0 \leq P(AB) \leq P(A) = 0$  立得  $P(AB) = 0$ . 由此引进:

**定义 2** 对于事件  $A$  和事件  $B$ , 若  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 则称它们相互独立.

定义 2 比定义 1 的适用范围稍广, 它对于  $P(A) = 0$  或  $P(B) = 0$  也适用, 其缺点是不够直观, 虽然如此, 鉴于定义 2 在形式上它关于  $A$  与  $B$  对称, 且便于推广到多个事件的情形, 所以一般情况下采用定义 2 来刻画事件  $A$  与  $B$  之间的独立性<sup>[6]</sup>.

从条件概率出发得到了事件的独立性定义, 有了事件的独立性, 就可以定义试验的独立性, 这样研究重复独立试验成为了可能. 重复独立试验在概率论中很有地位, 因为随机现象的统计规律性只有在大量重复试验中才会显示出来<sup>[6]</sup>, 概率论中的很多重大结果都是在独立性的假定下得到的, 由此可见条件概率在概率论中的重要程度.

##### 4.2 辨析本质

由上文可知, 如果事件  $A$  与事件  $B$  相互独立, 说明事件  $A$  发生与否不影响事件  $B$  发生的概率, 这是否意味着事件  $A$  发生与否对事件  $B$  的发生没有影响呢? 以下利用条件概率相关知识进行说明.

以问题 2 为例, 根据题意有:

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{6}{15}, \\ P(B | \bar{A}) &= \frac{n(\bar{A}B)}{n(\bar{A})} = \frac{2 \times 2}{2 \times 5} = \frac{4}{10}, \\ P(B) &= \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{5 \times 2}{5 \times 5} = \frac{10}{25}, \end{aligned}$$

$$P(B | A) = P(B | \bar{A}) = P(B),$$

可知事件  $A$  与事件  $B$  相互独立. 此时, 在事件  $A$  发生的条件下, 样本空间缩小为只包含 15 个样本点, 事件  $B$  包含其中 6 个样本点; 在事件  $A$  不发生 (即  $\bar{A}$  发生) 的条件下, 样本空间缩小为只包含 10 个样本点, 事件  $B$  包含其中 4 个样本点, 这就表明事件  $A$  的发生与否会对事件  $B$  的发生产生不同的影响.

但是由  $P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B)$ , 可知  $B$  在  $A$  中所占的比例与  $B$  在  $\Omega$  中所占的比例相等,  $B$  在  $A$  中所占的比例与  $B$  在  $\Omega$  中所占的比例也相等<sup>[7]</sup>, 这就清楚地解释了事件  $A$  发生与否不影响事件  $B$  发生的概率才是事件相互独立的本质.

### 4.3 反思教材

如上文所述, 按照数学知识的发展逻辑, 事件的独立性定义是在条件概率的基础上得到的. 但是《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称《课程标准》)要求在必修课程中介绍事件的独立性, 在选择性必修课程中介绍条件概率, 即先介绍事件的独立性, 后介绍条件概率. 因此, 在必修课程中无法借助条件概率来定义两个事件的独立性. 缺乏条件概率, 学生就无法真正理解“事件  $A$  发生与否不影响事件  $B$  发生的概率”的含义, 而且相互独立事件同时发生的概率只能通过实例归纳出来, 这种只凭感观判断获得的方法容易造成理性缺失, 知识脱节, 对概率问题的理解及将来继续学习不利<sup>[8]</sup>. 根据文<sup>[9]</sup>的调查, 在使用基于《课程标准》编制的2019年苏教版高中数学教材的2371名普通高中高一学生中, 只有29%的学生表示自己深刻理解了事件独立性的定义<sup>[9]</sup>. 这使得选择性必修中“条件概率与独立性的关系”的教学意义变得特殊, 它提供了以条件概率重新认识事件独立性的视角, 捋顺了知识的发展逻辑, 完善了学生的认知结构. 但是基于《课程标准》编制的七个版本的高中数学教材在此处的安排不尽相同, 人教A版将“条件概率的概念”“条件概率与独立性的关系”和“概率的乘法公式”这三大内容依次编排在条件概率小节中, 旨在1个课时完成; 人教B版、鄂教版、北师大版及湘教版都在条件概率小节之后单独安排了事件的独立性小节作为1课时的教学内容, 显然更重视这一内容; 苏教版在条件概率小节只是设置了一个思考题“试用条件概率说明两个随机事件的独立性”; 沪教版则是通过在条件概率小节的一道例题引出相关结论. 面对各种教材的不同处理, 教师必须明白, 要参考教材教学而不是按照教材教学, 教材为教师的创新教学留有一定的空间<sup>[10]</sup>, 针对这部分内容, 教师应该根据学生的实际水平灵活地规划课时, 创造性地、个性化地安排教学.

## 5. 教学建议

### 5.1 单元整体设计, 形成概念系统

对于概念的教学不能“只见树木, 不见森林”, 概念教学的最终目的是要帮助学生形成一个概念系统, 概念系统的形成有助于概念的记忆、保持和提

取. 单元整体教学设计能强化各相关内容之间的连续性和衔接性, 避免传统教学设计由于课与课之间的相互割裂而造成的知识“零散化”和“碎片化”<sup>[11]</sup>, 对于概念系统的形成帮助甚大. 因此, 需要以教材为基础, 围绕关键概念, 对教材中“具有某种内在关联性”的内容进行分析、重组、整合并形成相对完整的教学单元<sup>[11]</sup>. 对应到条件概率, 就可将必修教材中样本空间、随机事件、概率和古典概型等知识与选择性必修教材中乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式、事件的独立性和独立性检验等知识联系起来, 在课程内容结构化理念的指导下整体设计, 分步实施. 这种方式可以帮助学生站在高观点下审视单元内的数学知识, 建立知识之间的本质联系, 使知识系统化、条理化, 做到“既见树木, 又见森林”.

### 5.2 回归概念教学, 突出本质特征

李邦河院士说过: “数学根本上是玩概念的, 不是玩技巧, 技巧不足道也!” 可见数学概念教学的重要性. 概念教学不能只满足于告诉学生是什么或什么是, 还应让学生了解概念的背景和引入它的理由<sup>[12]</sup>, 要选择适当的素材, 设计恰当的问题情境, 使学生经历概念发生发展的过程. 《课程标准》对条件概率的要求是“结合古典概型, 了解条件概率, 能计算简单随机事件的条件概率”<sup>[13]</sup>. 因此, 教学要结合古典概型的实例, 通过列举试验的样本空间, 辅以Venn图直观地表示, 比较事件有条件与无条件时的概率, 使学生认识到如果附加某个事件  $A$  发生的条件, 试验的可能结果一定是  $A$  中某些样本点. 从而得出求条件概率  $P(B|A)$  的本质就是在缩小的样本空间  $A$  上计算事件  $AB$  的概率. 再根据比较的结果发现  $P(B) \neq P(B|A)$ , 说明事件  $A$  的发生对事件  $B$  发生的概率产生了影响. 既然有影响, 就应该考虑如何利用所得的结果去寻求  $P(B|A)$ ,  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(AB)$  之间可能存在的关系. 很自然的想法是将  $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$  右边分式的分子和分母转

化成概率的形式, 由古典概型,

$$P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{\frac{n(AB)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}} = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

最后抽象概括得出求条件概率的公式, 并将此公式作为条件概率的定义.

### 5.3 推理严谨缜密, 提升核心素养

概率与统计作为高中数学课程内容的主题, 概率是在概念和定义的基础上用演绎的方法进行研究的, 演绎推理过程严谨缜密, 其结论具有确定

性.而统计是建立在数据基础上,通过归纳方式进行研究,其结论具有随机性,它往往需要借助概率进行刻画.所以,从逻辑关系看,概率是统计的理论基础.2022年新高考 I 卷的概率统计题(第20题)就突出了概率知识的这两个特点,第(1)问中,独立性检验  $\chi^2$  统计量的导出过程利用了条件概率的概念,第(2)问直接考察了涉及条件概率和乘法公式的证明题.所以,对于条件概率的定义和概率的乘法公式的教学,公式的推导过程要有严格的逻辑证明,让学生掌握推理的依据,这样不仅有利于学生理解条件概率的相关知识,掌握证明的规则,提升逻辑推理核心素养,还能让学生感受到虽然统计的结论具有随机性,但是在严格的概率理论的保证下它是科学的,从而促进概率与统计的整体学习.

## 6. 结语

综上所述,条件概率在概率论中的地位是基础且重要的,是打通高中课程概率知识的“任督二脉”.教师要充分重视它,纵向要上通大学概率论,下达高中课堂,横向可取各版本教材之精华,创造性地教学.在教学中要突出本质,重视过程,推理严谨,形成系统,这样才能全面提升学生对条件概率的理解和运用能力.

### 参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022.
- [2] 马云鹏.聚焦核心概念 落实核心素养——《义务教育数学课程标准(2022年版)》内容结构化分析[J].课程·教材·教法,2022,42(06):35-44.

(上接第3页)

如果仅仅将教材中的阅读材料作为感性材料进行介绍,学生很难体会到数学家思维的伟大与数学的理性精神.将这一阅读材料植入对数概念的教学,一方面可以领略到数学家如何思考问题,另一方面是让学生在模拟的情境中进行数学家式的思维活动,让他们真正感受到数学家求真求实的理性精神,体会数学的思维之美.

总之,新教材中蕴含着极其丰富的德育资源,需要教师认真研究、挖掘其功能,并巧妙付诸于教学实践,真正发挥这些材料在育人上的作用,进而实现数学学科的立德树人.

- [3] 李杰民,廖运章.条件概率的本质及其教学建议[J].数学教育学报,2021,30(01):54-60.
- [4] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中教科书(A版):数学(选择性必修第三册)[M].北京:人民教育出版社,2019:46-47.
- [5] 戴朝寿.概率论简明教程[M].北京:高等教育出版社,2016:54-56.
- [6] 李贤平.概率论基础[M].北京:高等教育出版社,1997:73.
- [7] 金天寿.对事件独立性的再认识[J].数学通报,2012,51(03):24-26.
- [8] 徐道奎.由条件概率看概念教学在学生素养培养中的重要作用[J].数学通报,2018,57(06):34-38+43.
- [9] 吴明德.新版教材体系下独立事件的再认识[J].中学数学月刊,2022(02):24-25.
- [10] 胡典顺,徐汉文.数学教学论[M].武汉:华中师范大学出版社,2012:147.
- [11] 吕世虎,吴振英,杨婷,王尚志.单元教学设计及其对促进数学教师专业发展的作用[J].数学教育学报,2016,25(05):16-21.
- [12] 邵光华,章建跃.数学概念的分类、特征及其教学探讨[J].课程·教材·教法,2009,29(07):47-51.
- [13] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020:36.

(收稿日期:2022-07-14)

### 参考文献:

- [1] 沈恒.一个课后思考题的探究与随想[J].中国数学教育,2011(1-2):26-27.
- [2] 储炳南.传承数学经典 培养核心素养——祖暅原理的再应用[J].中学数学月刊,2019(9):30-32.
- [3] 石志群.数学教学如何“立德树人”[J].数学通报,2022(1):24-26,32.
- [4] 丁益民.例谈数学家思维的教学功能[J].数学通报,2016(5):15-17.

(收稿日期:2022-07-27)