双减下的数学精简单元教学探究
—— 以排列组合教学为例

安徽省萧县中学 (235200) 路召飞 殷雪剑

摘要 单元教学是新时代课程改革的重要内容, 它基于学习的需要, 通过构建单元知识的链条和结构体系, 整体设计单元教学方案, 达到发展学生核心素养和提升课堂教学效益的目的.

关键词 排列组合; 大单元教学; 课堂探究

排列组合是每年高考的热点问题, 因其解法灵活多样, 变化无穷, 所以给教学和学习增加了难度. 本文结合双减下的精简教学的课堂探究, 进行单元设计, 提高课堂效率, 进而提升数学核心素养的发展, 构建了自然连贯的教学过程.

1 涂色问题的探讨

(1) 直线型: 用 4 种不同的颜色, 给图 1 四个区域涂色, 每个区域涂一种颜色, 相邻区域不同色, 共有多少种涂法?

法一: 分步乘法原理 $4\times3\times3\times3=108$ “位置法”

法二: 元素优先

(1) 用 4 种颜色涂完 $A_4^4=24$;

(2) 用 3 种颜色涂完 $C_4^3C_3^1A_3^3=72, AC, AD, BD$ 同色;

(3) 用 2 种颜色涂完 $C_4^2A_2^2=12, AC, BD$ 同色;

由分类加法原理得 $24+72+12=108$.

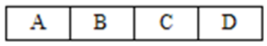

图 1

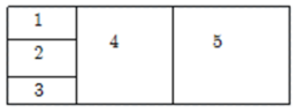

图 2

变式探究 用 4 种不同的颜色对图 2 中的 5 个区域涂色 (4 种颜色全部用完) , 每个区域涂一种颜色, 相邻的区域不能同色, 共有多少种不同的涂色方法?

由上述拓展, 教师通过“充分条件与必要条件”在函数奇偶性中的渗透, 可引导学生得到函数 $y=f(x)$ 图象关于直线 $x=a$ 对称或者关于点 (a,b) 对称的性质.

4.3 “充分条件与必要条件”在立体几何教学中的渗透

在文献 [2] 中介绍了通过“充分条件与必要条件”在直线与线面垂直的定义中渗透, 可逆向使用定义, 得到线线垂直与线面垂直互相转化的路径.

4.4 “充分条件与必要条件”在数列教学中的渗透

数列的学习通常围绕着通项公式 a_n 与前 n 项和 S_n 展开学习, 其中通项公式 a_n 与前 n 项和 S_n 的关系是数列学习中培养学生逻辑推理素养的一个重要教学环节. 由 2021 年高考全国甲卷第 7 题: 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 前 n 项和为 S_n, 设甲: $q>0$, 乙: $\{S_n\}$ 是递增数列, 则

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

启示在进行完等差数列与等比数列的前 n 项和 S_n 后, 可从“充分条件与必要条件”角度渗透公差或公比与通项 a_n 与前 n 项和 S_n 之间的逻辑关系. 上题等比数列 $\{a_n\}$ 中, 有逻辑关系: $\{S_n\}$ 是递增数列 $\Leftrightarrow a_n>0(\forall n>2), a_n>0(\forall n>2)\Rightarrow q>0$.

由于缺少 a_1 的信息, 因此无法得到“$a_n>0$”与“$q>0$”的充要关系. 类似的, 在等差数列中, 有逻辑关系: $\{S_n\}$ 是递增数列 $\Leftrightarrow a_n>0(\forall n>2), a_n>0(\forall n>2)\Rightarrow d>0$.

通过以上引导, 加强学生对公差或公比与通项 a_n 与前 n 项和 S_n 之间的逻辑关系的认识, 发展学生逻辑推理素养.

5 小结

综上所述, 在高中数学的概念与性质教学中通过“充分条件与必要条件”的角度引导学生对不同命题的思考和探索新命题, 能提高学生的逻辑推理能力, 从而令学生在高中多个概念与性质学习的过程当中培养逻辑推理素养.

参考文献

[1] 普通高中数学课程标准修订组. 普通高中数学课程标准解读 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2020. 11.

[2] 施永红. 浅谈运用逻辑用语提升逻辑推理素养——以“充分条件与必要条件”及其运用为例 [J]. 高中数理化, 2021(05) : 5-7.

(位置优先)(1) 路线: $4 \to 2 \to 1 \to 3 \to 5$, $4\times3\times2\times(1\times1+1\times3)=96$.

点睛 区分 13 同色、不同色. 分步乘法原理

(2) 15、25、35、13 同色, $C_4^1A_4^4=96$.

点睛 分组分配

(2) 环型

给图 3 中四个区域分别涂上 4 种不同颜色中的某一种, 允许同一种颜色使用多次, 但相邻区域颜色不同, 共有多少种涂色方案?

(位置优先) 法 1: 分步乘法 $4\times3\times2\times2=48$.

路线: $B\to C\to A\to D$, $(B\to A\to C\to D)$.

法 2: 路线 $A\to B\to D\to C$, (若 $A\to B\to C\to D$ 则同法一).

AD 同色 $4\times3\times1\times2=24$; AD 不同色 $4\times3\times2\times1=24$, 共有 48 种涂色方案.

在位置优先的原则下注意路线, 尽量回避 "对称" 的走法.

元素优先法

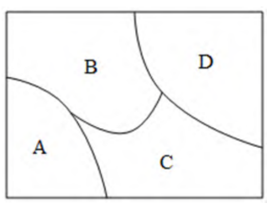

图 3

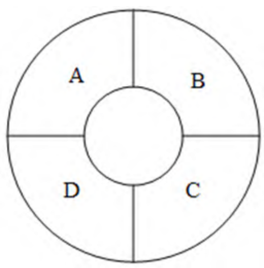

图 4

法 3: 用 3 色涂完 AD 同色 $C_4^3A_3^3=24$; 用 4 色涂完 $A_4^4=24$, 共有 48 种涂色方案.

变式 1 5 种不同颜色呢? 是 180.

变式 2 如图 4 一环形花坛分成 A、B、C、D 四块, 现有 4 种不同的花供选种, 要求在每块里种 1 种花, 且相邻的 2 块种不同的花, 则有多少种不同的种法? 是 84.

方法点睛 在涂色问题上注意两种不同方法的思路, 找到突破口, 才能找到最佳的解题方法.

2 排列站队问题的探究

7 人站成一排, 按如下方式站队, 共有多少种不同的方法?

(1) 甲乙两人相邻;

(2) 甲乙两人不相邻;

(3) 甲乙丙排序一定时;

(4) 甲在乙的右边 (不一定相邻) ;

(5) 7 人站成圆形;

(6) 甲不在首位;

(7) 甲既不在首位, 又不在末位;

(8) 甲不在首位, 乙不在末位.

探究解析 (1) 相邻问题, 捆绑法 $A_2^2\cdot A_6^6=1440$; (2) 不相邻问题, 插空法 $A_6^6\cdot A_7^2=30240$; (3) 定序问题思路 1: 先全排列再除以定序的排列, $\dfrac{A_7^7}{A_3^3}=840$, 思路 2: 7 个位置, 先去 4 人占位, 剩下即为固定的甲乙丙顺序, 即为 $A_7^4=840$. 结论: n 个元素中有 m 个元素固定顺序即为 $\dfrac{A_n^n}{A_m^m}=A_n^{n-m}(n>m)$, (4) 这是属于 (3) 的问题 $\dfrac{A_7^7}{A_2^2}=A_7^5=\dfrac{1}{2}A_7^7$, (5) 断圆问题 $\dfrac{A_7^7}{7}$(n 个元素) (6) $C_6^1A_6^6=4320$, (7) $C_5^1A_6^6=A_6^2A_5^5=3600$, (8) 直接法: 第一类乙在首位 $A_6^6=720$, 第二类乙不在首位 $C_5^1C_5^1A_5^5=3000$, 共有 $3000+720=3720$. 间接法: $A_7^7-2A_6^6+A_5^5=3720$.

方法点睛 这是排列中的常规问题, 理解题型, 注意特殊元素、特殊位置优先的原则即可.

3 分组与分配问题的探究

现有 6 本不同的书, 按如下方式分配, 各有多少种分法?

① 平均分成 3 份;

② 平均分给甲、乙、丙 3 名同学;

③ 分成一份 1 本, 一份 2 本, 一份 3 本;

④ 甲、乙、丙三人中一人 1 本, 一人 2 本, 一人 3 本;

⑤ 甲 1 本, 乙 2 本, 丙 3 本;

⑥ 甲 4 本, 乙丙各一本;

⑦ 一人 4 本, 其余两人各 1 本;

⑧ 分给 5 人, 每人至少 1 本;

⑨ 分给 4 人, 每人至少 1 本.

思路探究: ①无序均分 $\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}$; ②有序均分 $\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3$, 先分组再排列, (或者 $C_6^2C_4^2C_2^2$: 分步乘法 "人取书") . 均分问题: km 个不同元素平均分成 m 份, 每份 k 个元素, 则有: 有序均分 (人取) $C_{km}^kC_{(m-1)k}^k\cdots C_k^k$; 无序均分 (分堆) $\dfrac{C_{km}^kC_{(m-1)k}^k\cdots C_k^k}{A_m^m}$; ③无序不均分 $C_6^1C_5^2C_3^3$; ④$C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3$; ⑤$C_6^1C_5^2C_3^3$; ⑥$C_6^4C_2^1C_1^1$; ⑦$C_6^4A_3^3$; ⑧$C_6^2A_5^5$; ⑨$\dfrac{C_6^3C_3^1C_2^1}{A_3^3}\cdot A_4^4+\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^1}{A_2^2A_2^2}\cdot A_4^4$.

点评 既要注意均分还是不均分的问题, 还要看有序还是无序问题, 分组分配中常见的是先分组再分配问题.

练习变式 1 有编号分别为 1、2、3、4 的 4 个不同盒子和 4 个不同的小球, 把小球全部放入盒子内, 问:

(1) 共有多少种方法; 答案是 4^4.

(2) 若每个盒子内放一个小球; 答案是 A_4^4.

(3) 恰有一个空盒子; 答案是 $C_4^2A_4^3$.

新旧义务教育数学课程标准的比较研究

甘肃省天水市秦州区师院路天水师范学院 (741000) 杨 明 宋 蕾 王港华

摘要 国家课程标准是教材编写、教学、评估和考试命题的依据,是国家管理和评价课程的基础. 本文对《义务教育数学课程标准 (2011 年版) 》与最新颁布的《义务教育数学课程标准 (2022 年版》从编排结构、课程性质与理念、学科核心素养与课程目标、课程内容等方面进行对比分析和解读.

关键词 课程标准; 核心素养; 比较研究

2022 年 4 月,《义务教育数学课程标准 (2022 年版) 》(以下简称《课标 (2022 年版) 》) 正式颁布,该标准是《义务教育数学课程标准 (2011 年版) 》(以下简称《课标 (2011 年版)》) 的修订与补充,它既是中小学数学新教材编写的依据,也是基于数学学科核心素养的数学学业水平考试和中考的依据,更是一线教师课堂教学的依据. 为了更好地领会和落实《课标 (2022 年版) 》,本文对《课标 (2011 年版) 》和《课标 (2022 年版) 》进行了对比分析和简要解读.

---

(4) 恰有两个空盒子; 答案是 $\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\cdot A_4^2+C_4^3A_4^2$

(5) 若每个盒子内放 1 个小球,恰有一球的编号与盒子编号相同. 答案是 8.

变式 2 上题中的 4 个小球完全相同.

(1) 恰有一个空盒子; 答案是 $C_4^3C_3^1$.

(2) 恰有两个空盒子; 答案是 $C_4^2C_3^1$.

(3) 每个盒子内放 1 个球; 答案是 1.

(4) 若有 20 个相同小球,每个盒子内的球数不少于它的编号数. 答案是 $C_{13}^3=286$.

隔板问题 将 n 个相同的元素分配给 $m(m<n)$ 个不同的对象,每个对象至少含一个元素问题. 即: 在 n 个元素的 $n-1$ 个间隔中放 $m-1$ 块隔板,将其分为 m 份即可,共有 C_{n-1}^{m-1}.

反馈练习 (1) 将 5 个相同的小球放入 3 个不同的盒子,每个盒子至少有一个小球,共有多少中方法? 答案是 $C_4^2=6$.

(2) 某地区有 9 所学校,现有先进教师名额 11 个,要求每所学校至少一个名额,共有多少种不同分配方法? 答案是 $C_{10}^8=45$.

(3) 若 $x,y,z\in\mathbb{N}_+$,则有 $x+y+z=10$ 的解有多少? 答案是 $C_9^2=36$.

(4) **变 3** $x,y,z\in\mathbb{N}$,则有 $x+y+z=10$ 的解有多少? 答案是 $C_{12}^2=66$(先借).

4 在立体几何中的应用

(1) 某城市纵向有 6 条道路,横向有 5 条道路,构成如图所示的矩形道路图,则从 A 到 B 的最短路线共有多少条? (如图 5)

方法点睛 从 A 到 B 共分 9 步,需要 5 步横向,4 步纵向的,所以共有 $C_9^5=126$ 条.

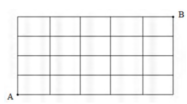

图 5

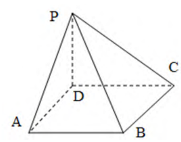

图 6

图 7

(2) 在图 6 的四棱锥中,顶点为 P,从其他的顶点和各棱中点中取 3 个,使它们和点 P 在同一平面内,则有多少种不同的取法?

方法点睛 第一类 4 个侧面,第二类平面 PBD 与平面 PAC $2C_4^3$,第三类 PA 与 BC、CD 的中点构成两个平面,$4C_2^1$,所以共有 $4C_5^3+2C_4^3+4C_2^1=56$.

(3) 如图 7,阴影部分由方格纸上 3 个小方格组成,称为这样的图案为 L 形,现有 3×5 个小小方格组成的方格纸上可以画出不同位置的 L 形图案的个数有多少?

分析 每相邻 4 个方格可以有 4 个 L,图中共有 8 个相邻的 4 方格,所以共有 $4\times8=32$.

方法点睛 在几何图形中构造出不同的分类模型是解题的关键.

5 教学思考

单元教学是基于培养学生的核心素养下的新课标要求,它将新的教学理念落实在每节课堂上,彰显数学的整体性与逻辑性,找到数学核心素养的孕育点,在不断的摸索与实践中,提高我们的课堂教学效率.