



综合情境中的问题导向设计*

——以“杨辉三角与二项式系数的性质”一课为例

陈沛余(浙江省义乌中学)

摘要:以“杨辉三角与二项式系数的性质”一课的情境创设为例,从数学知识的关联性、目标指向的明确性、问题设置的适切性三方面出发,探讨综合情境中的问题导向设计。

关键词:综合情境;问题导向;杨辉三角;二项式系数的性质

文章编号:1002-2171(2022)9-0015-04

1 问题的提出

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出,体现数学学科核心素养的首要方面是“情境与问题”,数学教学情境主要指现实情境、数学情境和科学情境^[1],在六大数学学科核心素养的三水平划分下,每种情境又分为三个层级:熟悉情境、关联情境和综合情境,三个层级是递进的关系。综合情境,可以理解为是在关联情境的基础上对关联情境的综合,其中包含着较多数学的基本信息和熟悉的元素,综合情境的抽象度和复杂度以及对学生的知识经验基础和认知水平要求都更高^[2]。

新课标新教材背景下,高中数学教学倡导从数学文化视角创设综合情境,但教师面临如何将数学知识、数学文化与创设情境合理联系的困境^[3],易产生不知其所以然、不知其何以然的迷失感。如何在综合情境中设置多层次的问题,引导学生用数学的眼光观察现象、发现问题,用恰当的数学语言描述问题,用数学思想、方法解决问题^[1],进而形成与发展数学学科核心素养?

本文以“杨辉三角与二项式系数的性质”一课的情境创设为例,从数学知识的关联性、目标指向的明确性、问题设置的适切性三方面出发探讨综合情境中的问题导向设计。

2 “计数原理”单元解析

2.1 “计数原理”单元内容解析

“计数原理”单元相对独立,是后续概率与统计内

容学习的基础。本单元主要学习两个计数原理(分类加法计数原理和分步乘法计数原理),排列、组合的概念,排列数公式、组合数公式,二项式定理。同时,利用两个计数原理可以推导出排列、组合、二项式定理的相关公式;应用这些公式,可以解决一些实际问题,尤其是某些概率问题。因此,两个计数原理的理解是本单元的教学重点。教学中应找准定位,避免高难度问题,避免机械套用公式,着重引导学生追本溯源,根据原理分析问题、解决问题。

本单元的概念具有一定的抽象性,教材采用归纳式的概念建构方式、猜想与推导并进的定理推导方式。学生在“问题情境—引导探究—抽象概括”的学习场景下体会分类、化归等数学思想。

2.2 “计数原理”单元目标解析

能够结合具体实例,将问题转化和对应到相应的原理上,识别与理解分类加法计数原理、分步乘法计数原理及其作用,并能够运用这些原理解决简单的实际问题;能够利用两个计数原理推导排列、组合、二项式定理的相关公式;能够结合具体实例,理解排列、组合、二项式定理和两个计数原理的联系,并运用这些知识解决简单的实际问题。

3 “杨辉三角与二项式系数的性质”数学探究活动课时分析

3.1 以高尔顿板为背景的综合情境分析

杨辉三角既有“一目了然”的性质,也有“深藏不露”的性质,实用又有趣。人教A版《数学》(选择性必修三)中专门将它作为一个主题,在二项式定理的

* 本文系2022年义乌市教育科学规划课题“基于深度学习的高中数学单元教学实践与研究”(yw2022239)系列研究成果。

学习后设置了数学探究活动,那么如何发现杨辉三角中数字排列的规律,将其与二项式系数联系呢?这需要学生具备观察、实验与归纳的能力。另外,人教A版《数学》(选择性必修三)第七章第四节“二项分布”一节给出了一个有关高尔顿板的例题。

例1 图1是一块高尔顿板的示意图。在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木钉,小木钉之间留有适当的空隙作为通道,前面挡有一块玻璃。将小球从顶端放入,小球下落的过程中,每次碰到小木钉后都等可能地向左或向右落下,最后落入底部的格子中。从左到右分别编号为 $0, 1, 2, \dots, 10$,用 X 表示小球最后落入格子的号码,求 X 的分布列^[4]。



图1

高尔顿板问题(如图2),既蕴含了杨辉三角的知识,又蕴含了随机变量二项分布的知识,利用它作为杨辉三角和二项式系数性质研究的载体,巧妙而贴切。

以高尔顿板为背景的综合情境对学生数学核心素养的水平要求很高,如图3分析,需要学生在情境中抽象出需要探究的数学问题,借助图形直观想象,找到合适的研究对象,将问题转化为运算问题,归纳推理,进而提出更有意义的数学问题。



图2

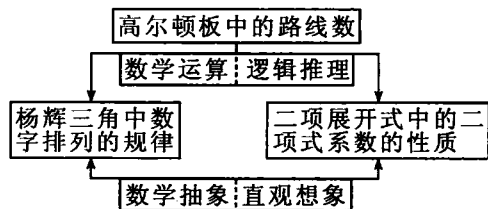


图3

3.2 课时教学目标

能运用已学的计数原理知识,发现高尔顿板中的路线数与杨辉三角中的数字排列规律的联系;能在观察后借助图形进行运算,归纳推理,利用杨辉三角研究二项展开式中的二项式系数的性质;能通过合作探究,拓展思考,提出有关杨辉三角的高阶数学问题。

4 以高尔顿板为背景的综合情境第一次实施

4.1 课前预设

情境:如图4,将弹珠●放入容器内,弹珠向下跌落,碰到第一层阻挡物○后等可能地向两侧跌落,碰到第二层阻挡物○后再等可能地向两侧跌落至第

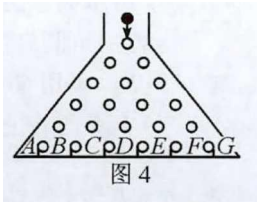


图4

三层,最终弹珠●落入底层,落入A,G区奖品价值最高,落入B,F区奖品价值次之,落入C,E区奖品价值略低,落入D区奖品价值最低。

课前问题预设如图5:

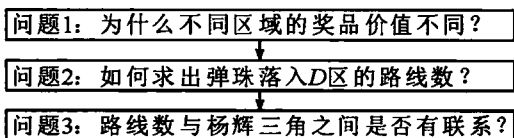


图5

4.2 课堂教学片段

实际教学过程中,笔者发现课堂并未按照教师的预设发展,而是有了较大出入,下面是与预设差异较大的几个片段。

预设问题1:为什么不同区域的奖品价值不同?

学生1:因为弹珠落入D区概率最大,落入A,G区概率最小。

教师:很好,那么概率应该怎么求呢?(适当停顿后)这是一个古典概型问题,我们可以通过求解弹珠落入每个区域可能的路线数与总的路线数解决这个问题。很显然,弹珠从顶部下落,落入D区可以走的路线最多,而落入A,G区可以走的路线最少。那么,我们是否可以写出落入各区的路线数呢?

思考:教师提问的是为什么弹珠落到A,G区奖品丰厚,学生均回答概率小,原因在于这个问题的指向性不够明确。而本节课的学习内容是探究杨辉三角与二项式系数的关系,与概率无关,教师必须将问题转化为各挡板的路线数问题,与已有数学知识关联,才能使教学沿着正确的方向推进。问题导向设计应聚焦教学目标,具有指向性;关注学生认知基础,具有适切性。

预设问题2:如何求出弹珠落入D区的路线数?

预设问题3:路线数与杨辉三角之间是否有联系?

学生2:我将这个图又画了一遍,如图6。A,B,C,D,E,F,G相当于下一层的挡板,以到D为例,问题就转化为了3根左斜线“/”与三根右斜线“\”的组合问题,所以顶端到D点的路线为 $C_3^3 = 20$ 。到其他几个点的路线数同理可得。

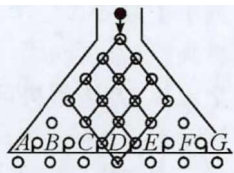


图6

教师:这位同学的方法十分巧妙,从顶端要到达D区,必须走过三根左斜线“/”与三根右斜线“\”,这样就把问题转化为组合问题,还有其他方法吗?

学生3:我是一条条数的,但还没有数出来。

教师:这方法也不错,但是将问题进行简化就能数出来了。

学生4:可以先从第二层开始,到第二层的两个

挡板路线数为1和1,到第三层的三个挡板路线数为1,2,1。

教师:很有道理,先从简单入手,那么到第四层,第五层呢?

同时教师板书每一层的路线数,如图7。

这时有些学生已经明白了其中的奥妙。

学生4:老师,这就是杨辉三角!

教师:是巧合吗?

学生5:不是巧合,弹珠要到下一层,肯定要从上一层落下,所以到某挡板处的路线数就等于上方两个挡板处的路线数之和。这与杨辉三角是吻合的。

教师:很好,同学们都非常机智,上述两种方法完美解决了这个“弹珠问题”,那么,这两种方法之间是否有联系呢?

学生6:都与二项式系数有关系。

学生7:对,两种方法的统一就是二项式定理,我将“/”用 x 表示,“\”用 y 表示,那么从顶端落到最下面一层即为 $(x+y)^6$ 展开式中各项系数,落到A区为 x^6 的系数,落到B区为 x^5y 的系数,相应地,落到D区为 x^3y 的系数。也就是说,杨辉三角本身就是二项展开式的二项式系数。

教师:很好,那么我们是否可以通过研究杨辉三角各数之间的规律得到二项式系数的性质呢?

思考:同一问题情境对不同类型的学生而言难度层级是不同的。面对弹珠路线这一综合情境,学生解决预设问题2时有两种不同的思考方式:一层一层数的方法看起来有些麻烦,却直接得出了杨辉三角;而将路线问题转化为组合问题的方法,则得出了二项式系数,这需要学生有更高的问题解决能力。教师对两种方法都给予肯定并帮助其完善,使不同类型的学生都保持相当的兴奋度,同时留给学生足够的思考时间产生体悟。多样的思路与充分的交流,使得问题探索更加深入与全面。既然两种方法都可以得到落入各区域的路线数,那么,“两种方法之间是否有联系”这一问题的提出是极其自然的,至于预设问题3的解决也就水到渠成了。当预设的问题顺序不适于课堂真实情况时应灵活调整,适当开放的问题设计,有助于帮助学生自然地发现并提出指向教学目标的问题。

5 以高尔顿板为背景的综合情境问题导向改良设计

杨辉三角和二项式定理的奇妙联系是人们不断

理解认识的结果,也是学生已了解的数学知识,但如何将二者建立联系是一大难点。从知识的关联性出发,以高尔顿板为背景创设情境,通过“弹珠游戏”中“为什么不同区域奖品价值不同”这一问题,自然建构,寻找到问题突破的逻辑起点。

基于以上思考,笔者针对本节课的综合情境改良了问题导向设计,以主问题为主线,设置辅助问题,帮助学生在面对综合问题情境时,学会先将其转化为关联的、熟悉的问题情境,通过逐步解决简单问题最终解决复杂问题,辅助问题只在需要时给出,不是必需的。主问题1是高起点问题,是在情境中自然产生也是必须要解决的问题,但学生的第一反应是用概率求解,这偏离了本节课的教学目标,这时设置辅助问题1-1和1-2,以突出目标指向的明确性;主问题2与主问题3是延伸问题,旨在将学生求解路线数的两种方法转化为动态的、全局性的思考,让学生在已有知识与自身探究发现之间建立起新关联,数学理解得到了发展。设置辅助问题3-1,进行元认知提问,以突出问题设置的适切性,符合不同学生的认知水平,探究自然深入;主问题4是一个更具普遍性的拓展问题,使学生对杨辉三角与二项式系数性质的理解更为全面与深刻。

主问题1:为什么不同区域的奖品价值不同?

辅助问题1-1:弹珠落入各个区域的概率怎么求?(古典概型求解)

辅助问题1-2:弹珠落入各个区域的路线数怎么求?(教师可做适当引导,一层一层数的方法可行吗?转化为组合问题,到达各区域需要走几步?有几步向右走,有几步向左走)

主问题2(希望由学生提出):求路线数的两种方法之间是否有联系?(杨辉三角本身就是二项展开式的二项式系数,转化为组合问题求解的过程就是求二项展开式的二项式系数的过程)

主问题3:通过研究杨辉三角各数之间的规律,同学们能否得到二项式系数的性质呢?

辅助问题3-1(元认知提问与引导):在用一层一层数的方法中,我们是否已经得到了一个性质? $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ (通过辅助问题,抛砖引玉,引发学生探究)

主问题4:今天我们研究了二维层面的杨辉三角,是否会有三维层面的杨辉三角呢?

6 结束语

情境中的问题作为启发学生思考的起点与桥梁,是达成数学学科核心素养的载体与通道。再次实施经过改良后的问题导向设计,课堂中学生交流积极充

分,对问题的探索更为深入。最惊喜的是主问题4的解决过程中,学生不仅提出是否有三维层面的杨辉三角,还提出主问题1中的概率是多少,是否可以将其拓展为分数形式的杨辉三角?能够自主发现问题、解决问题,这是学生思维在解决不断深化的问题的过程中得到良好训练的结果。

经过本次实践,笔者认为,综合情境中的问题导向设计,应遵从以下三个关键点:(1)情境选取需凸显数学知识的关联性,帮助学生找到学习新知识的逻辑起点,实现知识与方法的迁移;(2)起点问题设计需符合目标指向的明确性,同时富有思维挑战性,快速靶向发力,带领学生直奔核心问题进行探究,高效把握学习重点;(3)问题链设计需考虑问题设置的适切性,设计有思维跨度的主问题,应预设辅助问题,为学生多样的思维和探索提供可能^[5]。此外,教师需注意课堂的生成性与可控性,在多种数学思想交织下,设计

具有一定开放性、不断演进与发展的的问题链,实现综合情境中的问题导向,帮助不同类型学生在解决层次性、系统性、探究性问题的过程中形成基本的数学思维方法,发展数学核心素养。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 罗蓉.基于高中数学核心素养的问题情境创设研究——透过熟悉情境、关联情境和综合情境的视角[J].数学教学研究,2021,40(5):22-26,67.
- [3] 张萌.数学文化在高中数学教学中的渗透现状与对策研究[D].哈尔滨:哈尔滨师范大学,2020.
- [4] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程研究开发中心.普通高中教科书A版:数学(选择性必修第三册)[M].北京:人民教育出版社,2020.
- [5] 唐恒钧,张维忠.数学问题链教学的理论与实践[M].上海:华东师范大学出版社,2021.

(上接第14页)

提到第二种方法,为了不冲淡第一种方法的学习,可以对学生的方法予以认可,并让学生保留这一想法,留待以后研究。实现对同一问题的不同角度研究,数学内容的展开循序渐进、螺旋上升。

事实上,教学中经常遇到这种取舍的纠结,把握一个原则,即每节课的主题要明确,主线要清晰,在此基础上进行取舍,只有通盘考虑,合理取舍,才能保证教学效果最大化。

7 借助信息技术,让学生的视野从有限走向无限

鉴于学校的硬件条件和数学课对软件的需要,目前在课堂上常使用的软件是Excel、GeoGebra等。在现有资源下,教师在备课时需要思考的是如何利用现有资源将抽象内容可视化、静态内容动态化、繁杂但没有数学思维含金量的内容通过信息技术简单化等,从而更好地去落实“四个理解”中的“理解技术”。

例如,对无理指数幂的认识涉及数列极限的知识,具有构造性。对于这个难点,教学时师生要注意借鉴初中用有理数夹逼认识无理数的经验,通过Excel表格计算,展示用 $\sqrt{2}$, $5^{\sqrt{2}}$ 的不足近似值、过剩近似值夹逼 $\sqrt{2}$, $5^{\sqrt{2}}$ 的过程,并在数轴上进行动态演示,帮助学生更好地体验无理数指数幂的唯一确定性。在二分法的学习过程中,没有计算工具可以说寸步难行。同时还需要用信息技术画出函数的图像,让学生

切实看到函数的全貌及零点。在用数学软件操作的过程中,不同程度上深化了学生对无限逼近数学思想的认识。

在“指数函数与对数函数”一章的教学中,我们将需要运用信息技术解决的教学内容都做了尝试,有些设计可能不尽如人意,软件的一些功能也有待开发,但我们会继续探索信息技术与教学的深度融合。

阅读《核心素养立意的高中数学课程教材教法研究》一书,在大单元教学设计和教学改革实践活动的具体探讨下,我们才得以站在高处去理解教材、理解教材编者的意图,这些都会让我们的教学思考更加具体化,教学目标更加清晰化,更能让核心素养在实际教学中落地生根。

说明:文中课件可扫描下方二维码获得(图1)。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 章建跃.核心素养立意的高中数学课程教材教法研究(2021年版)[M].上海:华东师范大学出版社,2021.
- [3] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中教科书A版:数学(必修第一册)[M].北京:人民教育出版社,2021.
- [4] 王尚志,张怡慈,胡凤娟.指数幂与指数函数[J].数学通报,2010,49(2):6-9,14.
- [5] 李翠香,王梦娜.指数函数的七种等价定义[J].高等数学研究,2020,23(4):54-56.



图1