二项式定理在知识交会处的应用

刘海涛

(安徽省芜湖市第一中学)

1 求近似值

方法指导 1)当 a 的绝对值很小,且 n 不太大时,常用近似公式 $(1+a)^n\approx 1+na$,因为这时二项展开式的后面部分 $C_n^2a^2+C_n^3a^3+\cdots+C_n^na^n$ 很小,可以忽略不计.类似地,有 $(1-a)^n\approx 1-na$.使用上述两个公式时应注意 a 满足的条件,以及题目对计算精确度的要求.

2)对于有些求近似值的问题,我们常构造 $(b+c)^n$ 或 $(b-c)^n$,然后利用二项式定理来计算.

例1 求 1.02^9 的近似值(精确到小数点后三位).

解析 $1.02^9=(1+0.02)^9=C_9^0 0.02^0+C_9^1 0.02^1+C_9^2 0.02^2+\cdots+C_9^9 0.02^9\approx C_9^0 0.02^0+C_9^1 0.02^1+C_9^2 0.02^2+C_9^3 0.02^3=1+0.18+0.0144+0.000672\approx 1.195$.

点评 利用二项式定理求近似值,关键是确定展开式中的保留项,使其满足近似值的精确度.

2 整除或余数问题

方法指导 1)利用二项式定理解决整除问题,通常把底数写成除数(或与除数有密切关系的数)与某数的和或差的形式,再利用二项式定理展开.

2)解决求余数问题,要构造一个与题目条件有关的二项式.

例2 设 $a\in\mathbf{Z}$,且 $0\leqslant a\leqslant 16$,若 $4^{2020}+a$ 能被17整除,则 a 的值为( ).

A. 1 B. 4 C. 13 D. 16

解析 因为 $4^{2020}+a=(17-1)^{1010}+a=C_{1010}^0 17^{1010}(-1)^0+C_{1010}^1 17^{1009}(-1)^1+\cdots+$

$$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^1=\frac{36}{125},$$

$$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^0=\frac{8}{125},$$

所以 X 的分布列如表12所示.

表12

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$$E(X)=0\times\frac{27}{125}+1\times\frac{54}{125}+2\times\frac{36}{125}+3\times\frac{8}{125}=\frac{6}{5}.$$

启示 此题要分清超几何分布和二项分布的区别,超几何分布中随机变量取某一值时的概率符合古典概型,古典概型需满足有限性,即在一次试验中,基本事件发生的次数是有限的.第(2)问是在样本中考虑,从100人中随机抽取2人,符合古典概型.当随机变量的总体很大且抽取的样本容量相对于总体来说又比较小,且每次抽取时又只有两种试验结果,此时可以把它看成独立重复试验,利用二项分布求其分布列.第(3)问是利用样本估计总体,在北京市的总体数据中抽取,符合二项分布.

在求离散型随机变量的分布列时,一般按照如下步骤进行:分析题意→分别写出取值所表示的结果→写出 X 的所有可能取值→求出 X 取每一个值的概率→列表得出 X 的分布列.

在具体过程中,应把握两个关键点:

1)离散型随机变量的所有可能取值及对应的随机试验结果,二者之间可以相互转化;

(2)分清分布列的模型,并用相应的概率公式计算,这样就能准确高效地解答有关离散型随机变量的分布列问题.

(本文系北京市教育科学“十四五”规划2021年度一般课题“基于核心素养的高中数学概念分层教学研究”(课题编号:CDDB21245)阶段性研究成果.)

(完)

$C_{1\,010}^{1\,010}17^0(-1)^{1\,010}+a=17[C_{1\,010}^{0}17^{1\,009}(-1)^0+C_{1\,010}^{1}17^{1\,008}(-1)^1+\cdots+C_{1\,010}^{1\,009}(-1)^{1\,009}]+1+a$，且 $4^{2\,020}+a$ 能被17整除，所以 $1+a$ 能被17整除，又 $a\in\mathbf{Z}$，且 $0\leqslant a\leqslant 16$，则 $a=16$，故选D.

例3 80^{11} 被9除的余数为(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 8　　D. -8

解析 $80^{11}=(81-1)^{11}=C_{11}^{0}81^{11}(-1)^0+C_{11}^{1}81^{10}\cdot(-1)^1+\cdots+C_{11}^{10}81^1(-1)^{10}+C_{11}^{11}81^0(-1)^{11}=81[C_{11}^{0}81^{10}(-1)^0+C_{11}^{1}81^9(-1)^1+\cdots+C_{11}^{10}81^0\cdot(-1)^{10}]-1=81[C_{11}^{0}81^{10}(-1)^0+C_{11}^{1}81^9(-1)^1+\cdots+C_{11}^{10}81^0(-1)^{10}-1]+80=81[C_{11}^{0}81^{10}(-1)^0+C_{11}^{1}81^9(-1)^1+\cdots+C_{11}^{10}81^0(-1)^{10}]+72+8.$

因为81和72均能被9整除，所以 80^{11} 被9除的余数为8，故选C.

点评 用二项式定理解答整除或余数问题的关键是构造二项式，利用二项式的特征作答.

3　证明不等式

方法指导　1)通过二项式定理的正用与逆用，结合不等式证明的方法进行论证.

2)应用二项式定理时应注意巧妙构造二项式.

3)证明不等式时，应注意运用放缩法.

例4 请利用二项式定理证明：$3^n>2n^2+1(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$.

解析 当 $n\geqslant 3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$3^n=(1+2)^n=1+C_n^1 2^1+C_n^2 2^2+\cdots+C_n^n 2^n>1+C_n^1 2^1+C_n^2 2^2=1+2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 4=2n^2+1$，结论成立.

点评 用二项式定理证明不等式，关键是明确二项式定理的特征，证明过程中注意对不等式进行恰当放缩.

4　求代数式的值

例5 设 $(1+\sqrt{2})^7=a+b\sqrt{2}(a,b\in\mathbf{N}^*)$，求 a^2-2b^2 的值.

解析 由 $(1+\sqrt{2})^7=a+b\sqrt{2}$，得 $(1-\sqrt{2})^7=a-b\sqrt{2}$，故 $a^2-2b^2=(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})^7(1-\sqrt{2})^7=(-1)^7=-1.$

点评 设 $f(x)=(1+\sqrt{2}x)^7$，由二项展开式易知 $f(1)=a+b\sqrt{2}$，$f(-1)=a-b\sqrt{2}$，实质上这是一种构造对偶式的思想方法.

5　与导数知识的交会

例6 已知 $(x+2)^{10}=a_0+a_1x+\cdots+a_{10}x^{10}$，则 $(a_1+3a_3+\cdots+9a_9)^2-(2a_2+4a_4+\cdots+10a_{10})^2$ 的值为________.

解析 对条件式求导得

$$10(x+2)^9=a_1+2a_2x+\cdots+10a_{10}x^9.$$

令 $x=1$，得 $10\times 3^9=a_1+2a_2+\cdots+10a_{10}$.

令 $x=-1$，得 $10=a_1-2a_2+\cdots-10a_{10}$.

于是

$$(a_1+3a_3+\cdots+9a_9)^2-(2a_2+4a_4+\cdots+10a_{10})^2=(a_1+2a_2+\cdots+9a_9+10a_{10})(a_1-2a_2+\cdots+9a_9-10a_{10})=10\times 3^9\times 10=1\,968\,300.$$

点评 根据求导的运算法则，和式的导数等于各式导数的和，对

$$(a+bx)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

求导，得

$$bn(a+bx)^{n-1}=a_1+2a_2x+\cdots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1},$$

分别赋值 $x=1,x=-1$，即可解题.

6　与数列知识的交会

例7 求证：$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$.

证法1　设 $S=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n$，则 $S=nC_n^n+(n-1)C_n^{n-1}+\cdots+2C_n^2+C_n^1=nC_n^0+(n-1)\cdot C_n^1+\cdots+2C_n^{n-2}+C_n^{n-1}$，所以 $2S=nC_n^0+nC_n^1+\cdots+nC_n^n=n(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)=n\cdot 2^n$，故 $S=n\cdot 2^{n-1}$.

证法2　对 $(1+x)^n=C_n^0x^0+C_n^1x^1+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$，求导得

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x^1+\cdots+(n-1)C_n^{n-1}x^{n-2}+nC_n^nx^{n-1},$$

令 $x=1$，得 $n\cdot 2^{n-1}=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n$.

点评 若二项式系数是组合数，则与二项式系数有关的数列求和问题可以逆用二项式定理求解，或用组合数的性质分析通项后用数列求和法求解.

(本文系安徽省芜湖市2022年度教育科学研究课题《基于SOLO理论的发展学生数学核心素养的实践研究》(立项课题编号:JK22019)阶段性研究成果.)

(完)