高中阶段的排列组合问题

梁佳殷

(黑龙江省哈尔滨师范大学教师教育学院　150025)

摘　要: 计数原理是数学研究的重要问题之一,更是高考中的常客. 本文将对排列组合问题的一些常见题型以及其相应的解题策略进行比较全面的总结.

关键词: 计数原理; 排列; 组合; 高考; 解题策略

中图分类号: G632　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1008 - 0333(2022)28 - 0095 - 03

1 特殊元素和特殊位置

这类问题的主要特征是具有特殊元素或者特殊位置. 这时我们应优先安排它们的位置.

例 1　由 0,1,2,3,4,5 可以组成多少个没有重复数字的四位奇数?

解析　题目要求组成四位奇数,则末位只能是 1,3,5 其中一个,且 0 不能在首位出现,所以优先考虑末位和首位. 末位共有 C_3^1 种,除去末位数字和 0,首位只能从剩余 4 个数字中选择一个,共有 C_4^1 种,最后是中间两位,从剩余的 4 个数字中选择两个,且其顺序会对结果造成影响,共有 A_4^2 种,由分步乘法计数原理求出答案为 $C_3^1C_4^1A_4^2 = 144$.

2 元素之间相邻

这类问题的主要特征是有某几个元素必须相邻. 这时我们先将它们捆绑在一起,视为一个元素,先求捆绑外部的排列,再求捆绑内部的排列,称为捆绑法.

例 2　A,B,C,D,E,F,G 七个人站在一排拍照,其中 A,B,E 三人想站在一起,D,G 二人想站在一起,求一共有多少种不同的站法?

解析　A,B,E 三人想站在一起,D,G 二人想站在一起,故将 A,B,E 三人捆绑在一起视作一个新的元素,将 D,G 二人捆绑在一起也视作一个新的元素,先求捆绑外部的排列,即 ABE,DG,C,F 四个元素进行排列,共 A_4^4 种站法,再求捆绑内部的排列,A,B,E 三人共 A_3^3 种站法,D,G 二人共 A_2^2 种站法,由分步乘法计数原理可得,共有 $A_4^4A_3^3A_2^2 = 288$ 种站法.

3 元素之间不相邻

这类问题的主要特征是有某几个元素必须不相邻. 这时我们可以先将没有特殊要求的元素进行排列,再将必须不相邻的元素进行插空,称为插空法.

例 3　(改自 2021 年理科甲卷 10) 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行,若 2 个 0 不相邻,共有多少种不同的排法?

解析　2 个 0 不相邻,则选用插空法. 先将 4 个 1 进行排列,其顺序并不影响结果,共有 1 种排法,再将 2 个 0 进行插空,四个元素五个空,其顺序也不影响结果,共有 C_5^2 种排法,由分步乘法计数原理可

收稿日期: 2022 - 07 - 05

作者简介: 梁佳殷(1999 -),男,黑龙江省齐齐哈尔人,硕士研究生,从事高中数学解题研究.

得,共有 $C_5^2=10$ 种不同的排法.

4 元素之间顺序固定

这类问题的主要特征是有某几个元素的前后顺序固定,这时我们共有三种做法. 其一,先将其他元素安排进空位中,再考虑顺序固定的几个元素; 其二,先将顺序固定的几个元素列出,用其他元素进行插空; 其三,对所有元素进行全排列,再除去顺序固定元素的排列数.

例4 学校迎新晚会共有 A,B,C,D,E,F,G 七个节目,考虑到节目效果,节目 G 必须在节目 A 之前,节目 A 必须在节目 D 之前,求一共能安排多少种不同的节目顺序?

解法1 先将其他元素安排进空位中,即先将 B,C,E,F 安排进7个空位中,共 A_7^4 种排法,再考虑顺序固定的几个元素,现在只剩下3个空位,且 A,D,G 三个节目的顺序固定,只有1种排法,由分步乘法计数原理可得,共有 $A_7^4\times1=840$ 种不同的节目顺序.

解法2 先将顺序固定的几个元素列出,由于其顺序固定,只有1种排法,即 GAD,再将剩余的4个元素进行插空,放入第一个元素时有4个空位,放入第二个元素时有5个空位,放入第三个元素时有6个空位,放入第四个元素时有7个空位,由分步乘法计数原理可得,共有 $1\times4\times5\times6\times7=840$ 种不同的节目顺序.

解法3 先对所有元素进行全排列,7个不同的元素,共有 A_7^7 种排法,再除以顺序固定元素的排列数,已知 A,D,G 三个节目的先后顺序固定,而在全排列中,考虑了它们三个的排列顺序问题,故用全排列数 A_7^7 除以 A,D,G 三个节目的排列数 A_3^3 得出结果为840种.

5 分配问题

这类问题的主要特征是将元素分配到不同的位置中,且每个位置要求至少有几个元素. 这时我们先按照要求进行选择,再进行分配.

例5 将5名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶4个项目进行培训,每名志愿者只分配到1个项目,每个项目至少分配1名志愿者,则不同的分配方案共有(　　).

A. 60种　B. 120种　C. 240种　D. 480种

解析 4个位置5个人,且每个位置至少1人,则其中必有一个位置有2个人,故先选择出2个人分为一组,共有 C_5^2 种方法,再将4组分配到4个位置上,由于其顺序会影响结果,则共有 A_4^4 种分配方法,由分步乘法计数原理可得,共有 $C_5^2A_4^4=240$ 种,故选C.

6 分组问题

这类问题的主要特征是将元素进行分组,且对每组的数量有要求. 这时我们先按照题目要求进行分组,再除以组数的全排列 A_n^n(n 为要求数量相同的组数).

例6 将 A,B,C,D,E,F,G 七个人分为3组,一组3个人,另外两组2个人,求共有多少种分法?

解析 7个人分为人数为2,2,3的三组,先按要求进行选人分组,共有 $C_7^3C_4^2C_2^2$ 种分法,由于有两组同为2人的分组,故再除以 A_2^2,得出结果共有 $\frac{C_7^3C_4^2C_2^2}{A_2^2}=105$ 种分法.

7 元素相同问题

这类问题的主要特征是元素之间没有任何区别,再将它们进行分组,且每组至少一个元素. 这时我们先将全部元素列出,以插板的方式将其分组,即用 $(m-1)$ 个隔板将全部 n 个相同元素分为 m 段,称为隔板法.

例7 把10个相同的小球放入7个不同的盒子中,每个盒子至少放1个球,共有几种不同的放法?

解析 10个小球完全相同,先将它们排成一排,由于小球完全相同,共有1种排法,再用6个隔

板插在它们中间的 9 个空之中,分为 7 组,则共有 $C_9^6=84$ 种不同的放法.

8 复杂问题

之所以称为复杂问题,是因为这类问题一般都不太容易理解,给的条件很复杂,学生在遇到这种题后第一反应一般是分类,就很容易出现多算、漏算的现象. 这时我们可以将问题转化为上述 7 类问题中的一种便于解答.

例 8 现有排成一排的十把椅子,若 A,B,C,D 四人都要入座,且每个人的左右两边都想留有一个空位,则一共有多少种不同的坐法?

解析 4 个人 10 把椅子,每个人身边都要留有空位,我们不妨将问题转化成"现有排成一排的 6 个空位,A,B,C,D 每人带着一把椅子排入其中,且他们之间互不相邻,共有多少种坐法?". 对于这样的不相邻问题,我们就可以选择插空法,6 个椅子之间 5 个空,由于其顺序会影响结果,则共有 $A_5^4=120$ 种坐法,复杂的问题就得到了解决.

9 分情况讨论问题

这应该是学生最喜欢的一类问题,没有什么特殊的技巧和解法,仅是讨论各种可能的情况就能够得出答案.

例 9 现要求在 4 名男生和 3 名女生中选择 4 人作为班会的主持人,且要求必须有男生也有女生,求有多少种不同的选法?

解析 这是一道很常见的需要讨论的问题. 需要 4 人,且既要有男生又要有女生,我们可以分为 3 男 1 女、2 男 2 女、1 男 3 女三种情况. 由分步乘法计数原理可得,3 男 1 女共 $C_4^3C_3^1=12$ 种选法,2 男 2 女共 $C_4^2C_3^2=18$ 种情况,1 男 3 女共 $C_4^1C_3^3=4$ 种情况,再由分类加法计数原理可得,共 $12+18+4=34$ 种不同的选法.

注:有时运用穷举法或者画树状图的方式,可能会得到意想不到的效果.

10 染色问题

染色问题是一种复杂的分情况讨论问题,做法一般是先选择其中一个位置,再跳格进行讨论.

例 10 如图 1,一环形花坛分成 A,B,C,D 四块,现有 4 种不同的花供选种,现在要求在花坛的每一块都要种且只能种 1 种花,且相邻的 2 块所种的花颜色不能相同,则不同的种法总数为____.

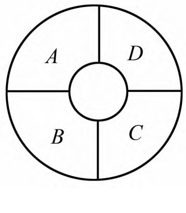

图 1

解析 我们可以按照使用花种类的数量进行分类,分为用 2 种、用 3 种和用 4 种. 用 2 种颜色的情况为 A,C 同色且 B,D 同色,共有 $A_4^2=12$ 种种法;用 3 种颜色的情况为 A,C 同色或 B,D 同色,共有 $2\times A_4^3=48$ 种种法;用 4 种颜色的情况为 A,B,C,D 互不同色,共有 $A_4^4=24$ 种种法. 由分类加法计数原理可得,共有 $12+48+24=84$ 种不同的种法.

这类问题也存在着通解,若一个圆被分为 n 个扇形,想用 m 种不同的颜色进行染色,每个小扇形只能染一种颜色且相邻的两个扇形颜色不能相同,则其共有 $(m-1)^n+(-1)^n(m-1)$ 种不同的染色方法.

排列组合这一节对学生的数学建模、数学运算、逻辑推理等核心素养要求较高,但只要多加练习,能够认准题型并熟练运用对应的方法,注意细节,就可以轻松解决.

参考文献:

[1] 张若琦. 高考中排列组合问题的解法归类研究[J]. 数学学习与研究,2021(36):150-152.
[2] 张丽秀. 解读 2008 年高考数学中的排列组合问题[J]. 考试与招生,2008(12):37-38.
[3] 吴高妙. 计数原理常用解题策略[J]. 中学生数理化(高考数学),2021(11):35-36.

[责任编辑:李 璟]