

高中数学课堂排列组合教学研究

杨卫(江苏省沭阳高级中学 223600)

【摘要】 排列组合是高中数学中较为抽象的内容,对学生分析、推理能力要求较高,为使学生掌握不同排列组合问题的解题方法,提高其解题正确率,有必要通过教学研究对相关教学情境分门别类,并通过选择经典习题,展示解题过程,给学生带来解题思路上的启发.

【关键词】 高中数学;排列组合;解题方法

排列组合问题的解题方法主要有捆绑法、插空法、隔板法、间接法等^[1].不同解题方法适用情境以及在不同细节的处理上存在较大差异.只有充分把握其本质,对相关情境进行正确、合理地想象,正确选择对应的解题方法,才能提高解题效率,因此,实践中应严把理解关,使学生真正地吃透与掌握.

1 捆绑法

捆绑法指将联系密切或必须排在一起的元素“捆绑”成一个整体,再与其他元素进行排列的一种方法^[2].通过“捆绑”将特殊元素特殊对待,能大大降低分析问题的难度.

当然完成“捆绑”后,还需根据实际情况分析其遵循分类还是分布计数原理.

例1 将6名志愿者分配到3个社区开展防诈骗宣传活动,其中甲、乙两名志愿者必须分配在一个社区,且每个社区至少有一名志愿者,则不同的分配方案有()

- (A)150种. (B)180种.
(C)360种. (D)540种.

分析 甲乙两名志愿者必须在一起,将其捆绑起来看成一个元素.三个社区分配的志愿者数量为

1、1、3时,有 $\frac{C_5^1 C_4^1 C_3^3}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 60$ 种方案;当数量为1、2、2时,有 $\frac{C_5^1 C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 90$ 种方案;由分类计数原

理可得共有可分配方案 $60 + 90 = 150$ 种,选择(A)项.

点评 采用捆绑法分析排列组合问题,剩余元素的处理应考虑其是排列问题还是组合问题,对于组合问题需将“顺序”带来的影响消除掉.

2 插空法

插空法在分析元素不相邻问题时较为常用,即先将无特殊要求的元素排列好,而后看其产生多个满足题意的空,再将不能相邻的元素插入.部分习题创设的情境较为复杂,还需采用捆绑法等其他一些方法.

总之,无论采用何种方法,应清楚形成的空的数量.

例2 3位妈妈带着3名女宝和2名男宝共8人进入博物馆参观.为保持秩序,现将其排成一列.其中3位妈妈不相邻,3名女宝相邻但不排在队伍的两端.为避免2名男宝打闹,其不能相邻,同样不排在队伍两端.则不同的排法共有()

- (A)144种. (B)216种.
(C)288种. (D)432种.

分析 该情境较为复杂,既要运用捆绑法又要运用插空法.分析时需具有条理性.

首先,3位母亲全排有 A_3^3 种排法;而后将3名女宝“捆绑”看成一个元素,有 A_3^3 种排法;其次,将“捆绑”后的女宝,插入3位母亲排列形成的两个空中,有 A_2^1 种排法;最后,选取1名男宝插入相邻的两个妈妈中间,而后将另一个男宝插入女宝和妈妈形成的2个空中的1个,共有 $C_2^1 C_2^1$ 种排法.

按照分步计数原理共有 $A_3^3 A_3^3 A_2^1 C_2^1 C_2^1 = 288$ 种方案.综上选择(C)项.

点评 题目中“男宝”不能相邻,因此,先对其

他元素进行针对性处理,而后在形成的空隙中进行插空分析,如此问题便能迎刃而解.

3 隔板法

隔板法中“隔板”的目的在于将元素划分成不同的“组别”.隔板既可以作为特殊的对象“插入”到实际元素形成的空中,也可将其看做特殊对象将其与实际元素进行针对性地排列组合.究竟采用何种方法,需具体问题具体分析.

例 3 使用 2400 元购买三种品种的山羊,每一种山羊的价格均相等为每只 300 元.若每种山羊至少买 1 只,则可能的购买方案共有()种.

(A)12. (B)14. (C)21. (D)18.

分析 2400 元共可购买 8 只山羊,要求每种山羊至少买 1 只.可将 8 只羊看成无差别的小球,而三种山羊可看作装入三个不同的盒子.8 个小球形成 7 个空,插入 2 个隔板,共有 $C_7^2 = 21$ 种不同的购买方案,选择(C)项.

点评 购买的山羊总数量为 8 只,但是将其分为三个品种,因此,在 8 只羊形成的 7 个空中插入两个隔板得到的方案数量即为所求.

4 间接法

排列组合问题中有一类问题采用直接方法虽然能分析出结果,但是步骤较为繁琐,对于多数学生而言容易忽略某一种情况^[3].

为避免出错可采用间接法进行处理,即先对元素进行全排,而后从相反的角度分析出排列结果,两者相减就是要求的结果.

采用间接法可降低计算复杂度,使复杂问题变得简单易处理.

例 4 假设车牌的编排规则为从 $\{0, 2, 6, 8\}$ 选出 3 个不同数字,从 $\{W, X, Y, Z\}$ 选 2 个字母,要求前 3 位是数字,后 2 位是字母,且数字 2 不能排在首位,字母 Z 和数字 2 不相邻,则满足要求的车牌号有

()

(A)198. (B)180. (C)216. (D)234.

分析 根据题意可从问题的反面入手,计算出全排以及不符合题意的排法,相减即为所求的方案.当数字 2 在首位时,在 $\{0, 6, 8\}$ 任选两个数字全排有 A_3^2 种方法,从 $\{W, X, Y, Z\}$ 选 2 个字母全排有 A_4^2 种排法.

当 2 和 Z 相邻时且 2 在数字位最后, Z 在字母位的最前面,从 $\{0, 6, 8\}$ 任选两个数字全排有 A_3^2 种方法,从 $\{W, X, Y\}$ 选 1 个字母放在字母位后有 C_3^1 种方法.根据题意全排的方法有 $A_4^3 A_4^2$ 种方法,则满足题意的方案有 $A_4^3 A_4^2 - A_3^2 A_4^2 - A_3^2 C_3^1 = 198$ 种,选择(A)项.

点评 从题干所给情境的反面出发,另辟蹊径,完成“数字 2 排在首位,字母 Z 和数字 2 相邻”的排法,而后分析出满足总体要求的排法,剩余的就是要求解的方案.

5 结语

综上所述,排列组合问题看似较为抽象,但是只要认真研究就会发现其有着一定的解题方法和技巧^[4].教学实践中应做好解题技巧的讲解,并鼓励学生做好总结,把握细节,并结合自身实际开展针对性的训练活动,真正地吃透与掌握.

参考文献:

- [1] 严步胜.高中数学排列组合的解题技巧[J].数理天地(高中版),2022(12):18-19.
- [2] 张飞飞.捆绑法在高中数学排列组合中的应用[J].数理化解题研究,2022(07):39-41.
- [3] 刘冬梅.高中数学排列组合推理的教学探讨[J].中学生数理化(教与学),2020(09):89.
- [4] 苗春兰.高中数学排列组合问题中的数学思想探究[J].中学数学,2019(11):67-68.