二项式定理的应用

姜铁军
（江苏省昆山市第一中学）

所谓二项式定理就是$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}\cdot b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n(n\in\mathbf{N}^*)$.我们把这个公式右边的多项式叫做$(a+b)^n$的二项展开式，把展开式中各项的系数$C_n^k(k=0,1,2,\cdots,n)$叫做二项式系数，把展开式中的第$r+1$项$C_n^ka^{n-k}b^k$叫做二项式展开式的通项，用$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$表示.不难发现，二项展开式有如下特点：

1）展开式中共有$(n+1)$项；

2）a的指数从n逐项递减到0，是降幂排列，b的指数从0逐项递增到n，是升幂排列；

3）各项的次数和等于n.

厘清二项式定理及其特点后，我们应该学会应用定理.那么如何用好这个定理呢？

1 正用

所谓正用就是直接求二项式展开式.求形式简单的二项展开式时可直接由二项式定理展开，展开时注意二项展开式的特点：前一个字母是降幂，后一个字母是升幂，形如$(a-b)^n$的展开式中会出现正负间隔的情况.对较繁杂的式子可先化简再用二项式定理展开.此外，正用二项式定理，还能求二项展开式中特定的项，如常数项、系数最大的项、有理项等.

例1 （1）在$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^7$的展开式中，$\dfrac{1}{x}$的系数是（　　）.

A. 35　　B. -35　　C. 560　　D. -560

（2）已知$(1+x)^7+k(x^2+x+1)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，且$a_2+2a_3+3a_4+4a_5+5a_6+6a_7=-9$，则$k=$________.

解析 （1）二项式$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^7$展开式的通项公式为$C_7^r\cdot x^{7-r}\cdot\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r=(-2)^r\cdot C_7^r\cdot x^{7-2r}$.令$7-2r=-1$，解得$r=4$，所以$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^7$的展开式中$\dfrac{1}{x}$的系数为$(-2)^4\times C_7^4=16\times35=560$，故选C.

（2）由二项式定理得$(1+x)^7$的通项为$C_7^rx^r$，又$k(x^2+x+1)^3=k[x^2+(x+1)]^3$，则其通项为$kC_3^m(x+1)^mx^{6-2m}$，即

$$k[x^2+(x+1)]^3=k[C_3^0x^6+C_3^1(x+1)x^4+C_3^2(x+1)^2x^2+C_3^3(x+1)^3]=k(x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1),$$

所以$a_2=C_7^2+6k$，$a_3=C_7^3+7k$，$a_4=C_7^4+6k$，$a_5=C_7^5+3k$，$a_6=C_7^6+k$，$a_7=C_7^7$，代入$a_2+2a_3+3a_4+4a_5+5a_6+6a_7=-9$，化简可得$55k=-330$，解得$k=-6$.

点评 在各级各类考试中，正用二项式定理的题型一般是求二项展开式中的特定项，一般采用通项法：1）求展开式中的特定项可依据条件写出第$r+1$项，再由特定项的特点求出r值即可.2）已知展开式的某项，求特定项的系数，可由某项得出参数的值，再由通项写出第$r+1$项，由特定项得出r值，最后求出特定项的系数.

2 逆用

逆用二项式定理可将多项式化简，对于这类问题的求解，要熟悉公式的特点、项数、各项幂指数的规律以及各项的系数.逆用二项式定理时，如果项的系数是正负相间的，则是$(a-b)^n$的形式.

例2 （1）已知$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n=729(n\in\mathbf{N}^*)$，则$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$的值为________.

（2）计算：$1-2C_{10}^1+4C_{10}^2-8C_{10}^3+\cdots-2^9C_{10}^9+2^{10}=$________.

解析 （1）因为$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n=(1+2)^n=3^n$，所以$3^n=729$，解得$n=6$，则

$$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(C_6^0+C_6^1+C_6^2+C_6^3+\cdots+C_6^6)-C_6^0=2^6-C_6^0=64-1=63.$$

（2）$1-2C_{10}^1+4C_{10}^2-8C_{10}^3+\cdots-2^9C_{10}^9+2^{10}=$

$C_{10}^{0}(-1)^{10}\times 2^{0}+C_{10}^{1}(-1)^{9}\times 2^{1}+C_{10}^{2}(-1)^{8}\times 2^{2}+\cdots+C_{10}^{9}(-1)^{1}\times 2^{9}+C_{10}^{10}(-1)^{0}\times 2^{10}=(-1+2)^{10}=1$.

点评 逆用二项式定理的关键是将所给出的多项式看成二项式展开式.

3 活用

灵活运用二项式定理，就是对于看似与二项式定理无关的问题，通过创造条件使之与二项式产生联系，从而利用二项式定理来解决，如利用二项式定理求近似值，证明整除关系、证明整数不等式或与组合数有关的恒等式等.

例 3 某同学在一个物理问题计算过程中遇到了对数据 0.98^{10} 的处理，经过思考，他决定采用精确到 0.01 的近似值，则这个近似值是________.

解析 由二项式定理得 $0.98^{10}=(1-0.02)^{10}\approx 1-C_{10}^{1}\times 0.02+C_{10}^{2}\times 0.02^{2}=0.8+0.018\approx 0.82$.

点评 应根据精确度确定留下展开式的前几项，一般来说，留下的项数越多，计算结果越精确.

例 4 已知 $S_n=2^n+C_n^1 2^{n-1}+C_n^2 2^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}2+1(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$. 求证：当 n 为偶数时，S_n-4n-1 能被 64 整除.

证明 $S_n=2^n+C_n^1 2^{n-1}+C_n^2 2^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}2+1=(2+1)^n=3^n$，因为 n 为偶数，设 $n=2k(k\in\mathbf{N},k\geqslant 1)$，所以当 $k\geqslant 2$ 时，有

$$S_n-4n-1=9^k-8k-1=(8+1)^k-8k-1=(C_k^0 8^{k-2}+C_k^1 8^{k-3}+\cdots+C_k^{k-2})\cdot 8^2. \quad ①$$

当 $k=1$ 时，$9^k-8k-1=0$，显然 S_n-4n-1 能被 64 整除. 当 $k\geqslant 2$ 时，式①能被 64 整除，所以 n 为偶数时，S_n-4n-1 能被 64 整除.

点评 证明整除性的关键是用二项式展开式表示被除式，并使得每一项都具有整除性.

例 5 （多选题）下列关系式成立的是（　　）.

A. $\sum_{k=0}^{n}2^k C_n^k=3^n(n\in\mathbf{N}^*)$

B. $2C_{2n}^0+C_{2n}^1+2C_{2n}^2+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}+2C_{2n}^{2n}=3\cdot 2^{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$

C. $2<(1+\frac{1}{n})^n<3\ (n\in\mathbf{N}^*)$

D. $C_n^1\cdot 1^2+C_n^2\cdot 2^2+\cdots+C_n^n\cdot n^2=n(n+1)\cdot 2^{n-2}$

解析 对于 A，因为 $3^n=(1+2)^n=C_n^0 2^0+C_n^1 2^1+C_n^2 2^2+\cdots+C_n^n 2^n=\sum_{k=0}^{n}2^k C_n^k$，故 A 正确.

对于 B，原式左边 $=(C_{2n}^0+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^{2n})+(C_{2n}^0+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n})=2^{2n}+2^{2n-1}=2^{2n-1}(2+1)=3\cdot 2^{2n-1}=$ 右边，故 B 正确.

对于 C，有

$$(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}, \quad ①$$

由式①知 $(1+\frac{1}{n})^n>2$. 另一方面，由于

$$(1+\frac{1}{n})^n=1+1+\frac{1\times(n-1)}{2!\ n}+\frac{1\times(n-1)\times(n-2)}{3!\ n^2}+\cdots+\frac{1\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1}{n!\ n^{n-1}}<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3,$$

故 C 正确.

对于 D，因为

$$C_n^k\cdot k^2=C_n^k[k(k-1)+k]=k(k-1)C_n^k+kC_n^k=\frac{k(k-1)\cdot n!}{k!\ (n-k)!}+k\cdot\frac{n!}{k!\ (n-k)!}=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}(k\geqslant 2),$$

原式左边 $=$

$$C_n^1+[n(n-1)C_{n-2}^0+nC_{n-1}^1]+[n(n-1)C_{n-2}^1+nC_{n-1}^2]+\cdots+[n(n-1)C_{n-2}^{n-2}+nC_{n-1}^{n-1}]=n+n(n-1)(C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+\cdots+C_{n-2}^{n-2})+n(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=n+n(n-1)2^{n-2}+n(2^{n-1}-1)=n(n+1)2^{n-2}=\text{右边},$$

故 D 正确.

综上，选 ABCD.

点评 应用二项式定理证明等式或不等式，没有固定的解题模式，解题要从实际出发，具体问题具体分析，有时既要正用二项式定理，又要逆用二项式定理. 不等式的证明还可能用到放缩法，但无论采用何种方法，利用二项式定理化简是解题的关键.

综上，二项定理看似简单，但它的应用却“不简单”，只要我们学会二项式定理的正用、逆用和活用，那么攻克二项式问题必然是“不在话下”.

（完）