巧用问题串促进学习的深度认知

——人教B版“条件概率”的教学设计与反思

赵宝东（山东省日照市五莲县教育事业发展中心）

摘　要：条件概率定义的理解是难点，本文借助一组递进问题串，逐一突破教学目标，帮助学生建构认识、抽象数学概念的过程。

关键词：问题串；深度认知；条件概率

文章编号：1002-2171(2022)12-0029-03

问题串式的教学设计是指当我们的教学在解决一个问题遇到困难时，根据学生的认知能力围绕目标设计一组递进式的问题串，将我们要突破的大目标分解成多个递进关系的小目标，在教学过程中依次展开，逐步深入达到突破教学大目标的目的。“问题串”教学是数学课堂教与学的重要方式，其可以激发不同层次学生利用操作、思辨、猜想、探索、合作等方式，获取“四基”；有利于学生开展积极的、富有个性的学习，并且不断提升其问题意识（即发现、提出问题和分析、解决问题的能力）。笔者以人教B版《数学》（选择性必修第二册）第四章“4.1.1 条件概率”为例，与同行分享巧用问题串促进学生深度学习的教学设计与反思。

1　教材解析

条件概率是建立在古典概型基础之上的又一类概率问题，它上承古典概型，涉及事件、样本空间、事件关系，下接乘法公式、独立事件概率公式，为导出二项分布奠定基础，起着承上启下的关键作用。

条件概率是指在一个事件 B 发生的条件下另一个事件 A 发生的概率，本质上是在缩小的样本空间 B 上事件 $A\cap B$ 的概率。条件概率的定义 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 的形成过程，隐含着条件概率的两种最基本的计算方法：一是在缩减后的样本空间求 $P(A|B)$（一般用于古典概型）；二是在原概率空间求出 $P(A\cap B)$ 和 $P(B)$，再求出 $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$，前者反映了条件概率的本质（缩减样本空间后的概率），后者反映了条件概率与一般概率的关系。

2　教学目标

（1）结合古典概型，了解条件概率的定义，能计算简单随机事件的条件概率。

（2）体会条件概率定义构建中“特殊到一般”“数形结合”等思想方法。

（3）经历条件概率的定义形成和简单随机事件条件概率计算的过程，培养学生的数学抽象、数学建模、数学运算等核心素养。

3　教学重难点

教学重点：条件概率的定义，计算简单随机事件的条件概率。

教学难点：条件概率的定义的理解。

4　教学过程

4.1　创设情境，引发认知

师生活动：盒子里有 10 个形状、大小、质地相同的球，其中有 5 个红球，3 个黄球，2 个蓝球，一名学生从盒子中任意取出一个球，藏于手心，其他学生竞猜这名学生取出小球的颜色。其他学生依据概率知识，多数猜红色。

问题 1：（1）求取出的球为红球的概率；

（2）已知取出的球不是黄球，求取出的球是红球的概率。

设计意图：从学生熟悉的摸球游戏开始，激发学生的学习热情，引发他们思考，积极参与互动，说出自己

的见解。同时创设条件概率情境，通过比较有条件概率和无条件概率，感知条件概率，引出条件概率课题。

4.2 探究交流，初识定义

问题2：某个班级有30名学生，其中男生、女生的人数及喜欢长跑的人数如表1所示。现从这个班级中随机抽取一名学生。设事件A：抽到的学生喜欢长跑，事件B：抽到的是男生。

表1 男生、女生喜欢长跑的人数统计表

类别	不喜欢长跑	喜欢长跑	合计
男生	6	8	14
女生	6	10	16
合计	12	18	30

(1)求$P(A)$，$P(B)$，并用韦恩图来描绘事件A与事件B之间的关系；

(2)求抽到的学生喜欢长跑且是男生的概率；

(3)若已知抽到的是男生，求所抽到的学生喜欢长跑的概率。

设计意图：将教材中的数据以表格的形式呈现，可以促进学生形成关于条件概率的直观形象，关注样本空间范围的变化。在教材原有设问的基础上增加求$P(B)$，$P(A\cap B)$，让学生在古典概型的背景下，清晰地认识$P(B)$，$P(A\cap B)$的内涵，为建立条件概率的定义奠定基础，也能发挥学生的主观能动性，暴露思维，有利于教师精准指导。增加使用韦恩图来描绘事件A与事件B之间的关系，使学生头脑中的抽象概念直观化。条件概率的定义的生长点是学生熟悉的古典概型，问题2在归纳条件概率的计算方法$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$的同时，为条件概率定义式的推导做铺垫，更好地发展学生的逻辑推理、数学运算、数学抽象和数学建模等核心素养。

4.3 设置悬疑，引发冲突

问题3：已知春季里，每天甲地下雨的概率为20%，且甲乙两地同时下雨的概率为12%，求春季一天里，已知甲地下雨的条件下，乙地也下雨的概率。

设计意图：问题3为教材第43页例2的节选，通过典例剖析，发现无法求出$n(B)$，$n(A\cap B)$，也无法求出$P(B|A)$，营造认知冲突，让学生在问题中切身感受引入条件概率定义的必要性，使概念的形成水到渠成，同时感受数学模型在数学应用中的价值。

4.4 深入探究，建构认知

问题4：我们再回到问题2中，$P(B)$，$P(A\cap B)$，$P(A|B)$有联系吗？为什么？

设计意图：引领学生继续探究$P(B)$，$P(A\cap B)$，$P(A|B)$之间的关系$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$，引导学生发现在原概率空间中即可计算条件概率，让学生真正经历条件概率定义的生成过程。教师通过集合表示（韦恩图），使学生感受在具体实例中抽象出的结论具有一般性，从而接受推广到一般结论的事实，深化其对条件概率定义的认识，实现突破重点和难点的目的。

4.5 学以致用，感受应用

问题5：掷红、蓝两个均匀的骰子，设事件A为蓝色骰子的点数为5或6；事件B为两骰子点数之和大于7。求已知事件A发生的条件下事件B发生的概率$P(B|A)$。

设计意图：体验条件概率的两种计算方法，一是在原样本空间求，巩固条件概率的定义$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$；二是在缩小后的样本空间求，用计数的方法$P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}$计算条件概率，体验缩小样本空间法在古典概型中的应用。此做法意在帮助学生提炼方法的同时总结步骤，提高他们分析问题、总结归纳的能力。

4.6 深度应用，巩固新知

问题6：判断正误。

(1)$P(A|A)=1$。 (　　)

(2)若事件A与B互斥，则$P(B|A)=0$。 (　　)

(3)若事件A与B相互独立，则$P(B|A)\neq P(B)$。 (　　)

设计意图：总结条件概率的性质，深刻解读条件概率的定义，揭示条件概率具有一般概率的性质。第(1)问和第(2)问引出条件概率的前两个性质，第(3)问体现事件的独立性与条件概率有着密切联系，为后面详细讨论两者之间的关系做铺垫。

4.7 自主命题，发展主观认知

问题7：每个学习小组自主命制一个条件概率问题，随机抽取一组展示并由全班限时作答。

设计意图：提出一个问题往往比解决一个问题更重要。正确提出条件概率的问题，有助于学生掌握条

件概率的定义，深化其对条件概率的认知。有助于让数学学习回归生活，引导学生会用数学的眼光观察世界。

4.8 归纳总结，提升整体认知

问题8：(1)本节课学习了哪些知识？我们是怎样研究的？

(2)通过本节课的学习，你对条件概率有哪些认识、收获和感悟？与前面学习的概率有哪些区别和联系？

设计意图：通过一个定义（条件概率），两种方法（定义法、缩小样本空间法），三个性质（问题6）；数形结合，由特殊到一般的思想方法的总结，引领学生回顾建立条件概率概念的过程，使其对本节课的学习有完整的认识，感悟知识螺旋式上升，巩固、深化理解所学知识，达成教学目标。同时，培养学生的反思意识。

5 教学反思

5.1 立足概念形成的问题串设计

本课例首先在学生的最近发展区设置情境问题1（摸球游戏），引起学生兴趣，激发其学习热情，为他们搭建合理、结实的"脚手架"，引出课题。然后通过学生身临其境的问题2（改编自教材第41页"尝试与发现"），设置3个小问层层铺垫，不仅让学生获取古典概型中条件概率的一个计算方法 $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$，还为引出条件概率的定义做铺垫。由列表过渡到更为直观的韦恩图，帮助学生理解条件概率的定义，化解教学难点，突出重点。通过问题3、问题4使学生产生认知冲突，为进一步学习条件概率的定义搭建阶梯。再利用问题5、问题6、问题7深化条件概率的定义，引出条件概率的性质。最后通过问题8引导学生对本节课的学习内容进行回顾。教育家魏书生说："教师不替学生说学生自己能说的话，不替学生做学生自己能做的事，学生能讲明白的知识尽可能让学生讲。"通过一系列由浅入深、前后衔接、相互呼应的梯度问题，将课堂放手给学生，引导他们去体验条件概率的定义的形成及应用，总结条件概率的两种计算方法，培养学生数学抽象、数学建模、数学运算等核心素养。

5.2 立足概念形成的计算设计

本课例在参加山东省优质课初评磨课的过程中，有老师曾提出问题"使用 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 计算条件概率，应该叫作定义法还是公式法？"针对这个问题，笔者向章建跃博士请教，章博士指出"对随机事件发生可能性大小的度量（数值）称为事件的概率（人教A版《数学》（必修第二册）第234页），$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 就是条件概率的定义，$P(A|B)$ 是条件概率的符号表示"。本课例，问题1抓住条件概率的本质，让学生在"从盒子中任意取一个球"的游戏中，分别计算出：(1)取出红球的概率是 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$；(2)已知这个球不是黄球，取出红球的概率是 $\frac{5}{7}$，学生通过比较有条件概率和无条件概率，感知条件概率。问题2中的3个小问题串仍然围绕计算展开，在归纳条件概率计算方法 $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ 的同时，为条件概率定义式的推导做铺垫；问题3立足于计算设计，但学生无法计算，引出问题4，问题4引导学生分组从左边到右边经过变形，即 $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$，得到条件概率的定义，从而突破本节课的难点。简言之，本课例的设计抓住了两条主线：计算是明线，条件概率的定义形成是暗线。

6 结束语

数学家华罗庚说："新的数学方法和概念，常常比解决数学问题本身更重要。"数学概念的教学探索是一个永无止境的过程。在具体数学概念教学的过程中，问题串式的教学设计能使概念教学层次化，使得学生在学习概念的过程中，将大问题转变为一个个层次递进的小问题，依次突破小目标，最终实现教学大目标，使得数学课堂更加生动且富有活力，从而改变填鸭式教学模式，让学生积极主动地探究成为可能，极好地证明了"数学知识既不是教出来的，也不是学出来的，而是研究出来的"；也使学生感受到从朴实无华的生活实例出发，通过恰到好处的启发引导，充分发挥其主观能动性，在探索中感知精彩的概念或公式，最终解决实际问题，体会数学学习的意义和价值，感受探索过程和结果的乐趣，培养学生的数学学习兴趣，逐步提升数学素养。