对一个条件概率问题的思考与变式

张洪源　（河北省唐山市第一中学 2020 级 16 班　063000）　指导教师　王筱颖

摘　要　本文对一个条件概率问题进行研究，在同一情景下对题目进行了多种变式，并探讨了解决这些不同的条件概率问题的方法.

关键词　条件概率；思考与变式

文章编号　1004-1176(2022)11-0077-01

条件概率是高中数学的重要知识点，掌握条件概率的概念和应用是学习的重点. 近日，《天才基本法》这部电视剧在各大平台热播，剧情中出现了许多有趣的数学题目，其中的一个条件概率问题引发了笔者的深入思考.

1　情景

有三个完全相同的盒子，第一个盒子里面装了 2 个红球，第二个盒子里面装了 2 个蓝球，第三个盒子里面装的是 1 个蓝球和 1 个红球.

2　问题与分析

从三个盒子中随机选择一个盒子，从里面拿出一个球，发现球是红色的. 这个盒子里剩下的那个球也是红球的概率是 ______.

为了便于分析，我们将题目中各个盒子中的球进行编号. 设第一个盒子中的两个红球分别为 A_1 和 A_2；第二个盒子中的两个蓝球分别为 B_1 和 B_2；第三个盒子里的红球为 A_3，蓝球为 B_3.

如果不仔细思考，我们很容易得到 $\frac{1}{2}$ 这个错误答案. 这是因为拿出来的红球来自第一个盒子的概率和来自第三个盒子的概率并不相等. 那么，正确的做法是怎样的呢？

解法 1　根据题意，随机拿出一个红球有 3 种情况，拿出的球和该盒剩下的球可能是 A_1A_2，A_2A_1，A_3B_3，这三种情况的可能性相等. 其中，符合题意的情况有 2 种，即 A_1A_2，A_2A_1. 因此，盒子里剩下的那个球也是红球的概率 $P=\frac{2}{3}$.

解法 2　设"拿出的球来自第 i 个盒子"为事件 $H_i(i=1,2,3)$，则 $H_1\cup H_2\cup H_3=\Omega$，$P(H_i)=\frac{1}{3}$. 设"拿出的一个球是红球"为事件 M，"拿出的球所在盒中剩下的球是红球"为事件 N. 由全概率公式得 $P(M)=P(H_1)P(M\mid H_1)+P(H_2)P(M\mid H_2)+P(H_3)P(M\mid H_3)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 易知 $MN=$"拿出的球和该盒中剩下的球都是红球"，则 $P(MN)=P(H_1)=\frac{1}{3}$. 因此，由条件概率公式可知，盒子里剩下的那个球也是红球的概率 $P(N\mid M)=\frac{P(MN)}{P(M)}=\frac{2}{3}$.

评注　此问题属于条件概率中的"有序"问题，和著名的"三门问题"原理类似，解决问题时一定不能盲目依靠直觉求解.

3　变式

变式 1　从三个盒子中随机选择一个盒子，发现盒里的两球中有红球. 这个盒子里的两球都是红球的概率是 ______.

设"从三个盒子中随机选择一个盒子，盒里的两球中有红球"为事件 M，"这个盒子里的两球都是红球"为事件 N. 选择的盒子里有红球即选择的盒子为第一个或第三个，易得 $P(M)=\frac{2}{3}$. 易知 $MN=N=$"这个盒子里两球都是红球"，则 $P(MN)=\frac{1}{3}$. 因此，由条件概率公式可知，这个盒子里两球都是红球的概率 $P(N\mid M)=\frac{P(MN)}{P(M)}=\frac{1}{2}$.

评注　此问题属于条件概率中的"无序"问题，如果采用列举法，一定要注意 A_3B_3 和 B_3A_3 两个事件都需满足已知条件.

变式 2　从三个盒子中随机选择一个盒子，从里面拿出一个球，发现球是红色的. 这个球来自第一个盒子的概率是 ______.

设"拿出的球来自第 i 个盒子"为事件 $H_i(i=1,2,3)$，则 $H_1\cup H_2\cup H_3=\Omega$，$P(H_i)=\frac{1}{3}$. 设

（下转第 79 页）

$h \cdot d=(b-a)(AB-h)$,解得 $AB=\dfrac{dh}{b-a}+h$.[1]

通过 $AB=\dfrac{dh}{b-a}+h$ 可知,只要测得 a,b,d,h,即可计算出 AB. 因为这里需要两次测量影长,计算中用到两个影长的差,所以我国古人称其为"重差术". 重差术是我国古代数学与测量学中的重要成果之一.

古人在一次又一次的演算与思考中获得真理,他们的智慧与钻研精神着实令人钦佩. 不难发现,古今中外人们对测量问题都有研究,方法与原理也各不相同,各具特色,各有优势. 我国古人更善于从一类问题中总结出一般性的结论与规律,并运用这些结论与规律解决同类问题.

指导老师点评　中华优秀传统数学文化是中华民族共同的精神财富,其间蕴含着丰富的数学学习素材. 在我国古代,与测量相关的技术称为"测望之术",包括测高、测深、测远等. 根据测望次数,又分为"一望""二望""三望""四望"等. 重差术公式主要用于解决"二望"问题. 两位小作者研究了教材中的测量建筑物高度的方法和我国古代的"重差术",发现古代数学家利用"勾中容横,股中容直原理"推算出解决这类问题的公式,只要测量出公式中的几个量,代入公式即可计算出物体的高度. 同时,两位小作者还体会到我国古代数学家善于从一类问题中总结出一般性的规律与方法,并用其解决同类问题. 这种机械化的算法思想是我国古代数学的一大特色. 中华优秀传统数学文化博大精深,我们要认真研究,将其传承和发扬下去.

参考文献

[1]　刘钝. 大哉言数[M]. 沈阳:辽宁教育出版社,1993:412.

(上接第 77 页)

"拿出的一个球是红球"为事件 M. 由全概率公式得 $P(M)=P(H_1)P(M\mid H_1)+P(H_2)P(M\mid H_2)+P(H_3)P(M\mid H_3)=\dfrac{1}{3}\times1+\dfrac{1}{3}\times0+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. 由概率乘法公式得 $P(H_1M)=P(H_1)P(M\mid H_1)=\dfrac{1}{3}$. 因此,由条件概率公式可知,这个球来自第一个盒子的概率 $P(H_1\mid M)=\dfrac{P(H_1M)}{P(M)}=\dfrac{2}{3}$.

评注　此问题属于条件概率中的后验概率问题,即"执果寻因",可以使用贝叶斯公式直接求解.

变式 3　从三个盒子中随机选择两个盒子,分别从中拿出一个球,发现拿出的球里有红球. 拿出的两球是一红一蓝的概率是______.

解法 1　根据题意,拿出球的情况可能是 $A_1B_1,A_1B_2,A_2B_1,A_2B_2,A_1A_3,A_1B_3,A_2A_3,A_2B_3,A_3B_1,A_3B_2$,且这 10 种情况的可能性相等. 拿出的两球是一红一蓝的事件有 8 种,即 $A_1B_1,A_1B_2,A_2B_1,A_2B_2,A_1B_3,A_2B_3,A_3B_1,A_3B_2$. 因此,拿出的两球是一红一蓝的概率 $P=\dfrac{4}{5}$.

解法 2　设"选择的盒子为第一个和第二个"为事件 H_1,"选择的盒子为第一个和第三个"为事件 H_2,"选择的盒子为第二个和第三个"为事件 H_3,则 $H_1\cup H_2\cup H_3=\Omega$,$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\dfrac{1}{3}$. 设"拿出的球里有红球"为事件 M,"拿出的两球是一红一蓝"为事件 N."拿出的球里有红球"的对立事件是"拿出的两球都是蓝球". 由全概率公式得 $P(\overline{M})=P(H_1)P(\overline{M}\mid H_1)+P(H_2)P(\overline{M}\mid H_2)+P(H_3)P(\overline{M}\mid H_3)$ $\dfrac{1}{3}\times0+\dfrac{1}{3}\times0+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$,所以 $P(M)=1-P(\overline{M})=\dfrac{5}{6}$. 由全概率公式得 $P(MN)=P(N)=P(H_1)P(N\mid H_1)+P(H_2)P(N\mid H_2)+P(H_3)P(N\mid H_3)=\dfrac{1}{3}\times1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$. 因此,由条件概率公式可知,拿出的两球是一红一蓝的概率 $P(N\mid M)=\dfrac{P(MN)}{P(M)}=\dfrac{4}{5}$.

评注　此类问题事件情况数较多,需要对事件进行合理拆分,结合全概率公式求出所需事件概率. 如果遇到求复杂事件的概率时,可以尝试使用"正难则反"的方法,先求出其对立事件的概率,再得到所求概率.

以上是笔者对于一个条件概率问题进行的思考与变式,希望能对各位读者学习、理解此类问题有所帮助.