盘点二项式定理中的“系数”问题

邓高宣

（湖北省恩施市第三高级中学）

二项式定理在近几年的高考中多以选择题、填空题的形式出现，涉及的题型主要有求展开式中的特定项、求特定项的系数、整除（求余）、求近似值等问题．本文就二项式定理中的“系数”问题加以归类和解析．

1　利用二项展开式通项公式求特定项的系数

例1　在$(x-\frac{1}{2\sqrt{x}})^5$的展开式中$x^2$的系数为________．

解析　$(x-\frac{1}{2\sqrt{x}})^5$的展开式的通项公式为

$$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-\frac{1}{2\sqrt{x}})^r=(-\frac{1}{2})^r C_5^r x^{5-\frac{3}{2}r},$$

令$5-\frac{3}{2}r=2$，得$r=2$，则x^2的系数为

$$(-\frac{1}{2})^2 C_5^2=\frac{1}{4}\times 10=\frac{5}{2}.$$

点评　本题主要考查了二项式定理通项公式的运用．求二项展开式的特定项的系数问题，一般是利用通项公式进行化简，然后通过待定系数法解出T_{r+1}中的r，再代回通项公式求出系数即可．

变式　二项式$(x-\frac{a}{x})^6$的展开式中常数项为-20，则含x^4项的系数为（　　）．

A. -6　　B. -15　　C. 6　　D. 15

解析　$(x-\frac{a}{x})^6$的展开式的通项公式为

$$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(-\frac{a}{x})^r=(-a)^r C_6^r x^{6-2r},$$

当$r=3$时，T_4为常数项，则$C_6^3(-a)^3=-20$，得$a=1$，令$6-2r=4$，得$r=1$，所以含x^4项的系数为$C_6^1(-1)^1=-6$，故选A．

2　求多个二项式的和(或积)展开式中特定项的系数

例2　$(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{10}$展开式中$x^3$的系数为________．

解析　**方法1**　因为$(1+x)^3,(1+x)^4,\cdots,(1+x)^{10}$的展开式中$x^3$的系数分别为$C_3^3,C_4^3,\cdots,C_{10}^3$，所以展开式中$x^3$的系数为

$$C_3^3+C_4^3+C_5^3+\cdots+C_{10}^3=C_{11}^4=330.$$

方法2　原式$=\frac{(1+x)^3[1-(1+x)^8]}{1-(1+x)}=\frac{(1+x)^{11}-(1+x)^3}{x}$，所以展开式中$x^3$的系数为$C_{11}^4=330$．

点评　求解时可以把二项式展开式中每一个x^3的系数找出来，然后再相加，也可以利用等比数列求和公式解答．

例3　$(x+y-2z)^5$的展开式中xy^2z^2的系数是（　　）．

A. 120　　B. -120　　C. 60　　D. 30

解析　**方法1**　$(x+y-2z)^5=[(x+y)-2z]^5$的展开式中第$r+1$项为$C_5^r(x+y)^{5-r}\cdot(-2z)^r$，令$r=2$，可得第3项为$(-2)^2C_5^2(x+y)^3z^2$．而$(x+y)^3$的展开式的第$m+1$项为$C_3^m x^{3-m}y^m$，令$m=2$，可得第3项为$C_3^2xy^2$，所以$(x+y-2z)^5$的展开式中，$xy^2z^2$的系数是$(-2)^2C_5^2C_3^2=120$，故选A．

方法2　因为$(x+y-2z)^5$为5个$(x+y-2z)$的乘积，要得到xy^2z^2这一项，需要上式中的5个括号中有一个取x，两个取y，余下的两个括号取z，于是得到xy^2z^2的系数为$C_5^1\cdot C_4^2\cdot C_2^2(-2)^2=120$，故选A．

点评　求解时先利用化归与转化思想把三项式转化为二项式，然后利用通项公式进行化简，再通过待定系数法解出T_{r+1}中的r，代回通项公式求出系数，也可利用排列组合的知识解决．

例4　$(x+y)(2x-y)^6$的展开式中x^4y^3的系数为（　　）．

A. -80　　B. -40　　C. 40　　D. 80

解析　$(x+y)(2x-y)^6=x(2x-y)^6+y(2x-y)^6$的展开式中要得到$x^4y^3$，则$x\cdot C_6^3(2x)^3\cdot$

$(-y)^3+y\mathrm{C}_6^2(2x)^4(-y)^2=80x^4y^3$，故选 D.

点评 求解时先利用化归与转化思想把两个二项式的积转化为两个二项式的和，然后利用通项公式进行化简，再通过待定系数法解出 T_{r+1} 中的 r，代回通项公式求出系数即可.

例 5 已知 $(x+1)^6=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_6(x-1)^6$，则 $a_2=$________.

解析 设 $x-1=t$，则

$$(t+2)^6=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_6t^6,$$

故 $a_2=\mathrm{C}_6^2\times 2^4=240$.

点评 本题中等式左边为 $x+1$，右边为 $x-1$，需令 $x-1=t$，将 $x+1$ 转化为 $x-1$，利用二项式定理求解.

3 求多项式展开式中各项的系数之和或某些项的系数之和

例 6 已知 $(1+x)(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$（　　）.

A. -2　　B. -3　　C. 125　　D. -131

解析 由题意知 $a_8=\mathrm{C}_7^7(-2)^7=-128$，令 $x=0$，可得 $a_0=1$，令 $x=1$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=-2$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_7=125$，故选 C.

点评 求解本题应先根据展开式的结构特点求出 a_8，令 $x=0$，求出 $a_0=1$，再令 $x=1$，求出 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=-2$，最后求出 $a_1+a_2+\cdots+a_7$，用二项式定理展开求系数和时，可采用赋值法，通常令变量的值为 0，1 或 -1 等.

变式 已知 $(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$，则 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_5|=$________.

解析 由题意可知，在 $(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$ 中，a_0,a_2,a_4 为正数，a_1,a_3,a_5 为负数，所以 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_5|=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$. 令 $x=-1$，得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=3^5=243$，所以

$$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_5|=243.$$

4 求二项式展开式中系数最大的项

例 7 若 $(\frac{1}{2}+2x)^n$ 展开式中前三项的二项式系数之和为 79，求展开式中系数最大的项.

解析 由题意知 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2=79$，所以 $n^2+n-156=0$，所以 $n=-13$（舍）或 12.

设 T_{k+1} 项的系数最大，因为

$$(\frac{1}{2}+2x)^{12}=(\frac{1+4x}{2})^{12}=(\frac{1}{2})^{12}\cdot(1+4x)^{12},$$

所以

$$\begin{cases}\mathrm{C}_{12}^k\cdot 4^k\geqslant \mathrm{C}_{12}^{k-1}\cdot 4^{k-1},\\ \mathrm{C}_{12}^k\cdot 4^k\geqslant \mathrm{C}_{12}^{k+1}\cdot 4^{k+1},\end{cases}$$

解得 $9.4\leqslant k\leqslant 10.4$，又 $k=1,2,\cdots,12$，所以 $k=10$，则展开式中系数最大的项为 T_{11}，故

$$T_{11}=\mathrm{C}_{12}^{10}\times(\frac{1}{2})^{12}\times 4^{10}\times x^{10}=16\ 896x^{10}.$$

点评 二项式系数、项的系数是两个不同的概念，二项式系数最大的项一定是展开式中的中间项（或中间两项）；而系数最大的项是通过解不等式组的方法来求解，且一定要考虑到系数前的符号.

变式 若 $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式中各项系数之和大于 8，但小于 32，则展开式中系数最大的项为________.

解析 令 $x=1$，可得 $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中各项系数之和为 2^n，即 $8<2^n<32$，解得 $n=4$，故第 3 项的系数最大，所以展开式中系数最大的项为

$$\mathrm{C}_4^2(\sqrt{x})^2(\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2=6\sqrt[3]{x}.$$

5 求二项式展开式中与系数有关的参数

例 8 已知 $(2+ax)(1-2x)^5$ 的展开式中含 x^2 项的系数为 70，则实数 a 的值为（　　）.

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

解析 $(1-2x)^5$ 展开式的通项公式为

$$T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r(-2x)^r=(-2)^r\mathrm{C}_5^r\,x^r,$$

由于 $(2+ax)(1-2x)^5=2(1-2x)^5+ax(1-2x)^5$，据此可知含 x^2 项的系数为

$$2\times(-2)^2\mathrm{C}_5^2+a(-2)^1\mathrm{C}_5^1=80-10a,$$

结合题意可知 $80-10a=70$，解得 $a=1$，故选 A.

点评 二项式定理中求参数问题，一般是利用通项公式进行化简后，令字母的指数符合题目要求的数，解出 T_{r+1} 中的 r，再代回通项公式即可.

变式 1 若 $(x^2+\frac{1}{ax})^6$ 的二项展开式中 x^3 的系数为 $\frac{5}{2}$，则 $a=$________（用数字作答）.

例析求解二项式展开式系数的常见策略

张 平
(广东省珠海市实验中学)

二项式定理是对初中完全平方公式与多项式乘法的拓展与延伸,既是排列组合知识的直接应用,又与概率中的二项分布有着紧密的联系,在高考中多以填空题或选择题的形式呈现,属于基础题,以考查二项式定理基础知识与方法的应用为主,重点考查学生的转化与化归能力、数学运算能力,兼顾数学抽象、逻辑推理等素养.本文结合题目进行分类剖析,以提高解决此类问题的能力.

1 基础知识

1) 二项式$(a+b)^n$的展开式通项为$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k(k=0,1,2,\cdots,n)$,其中$C_n^k$为展开式第$k+1$项的二项式系数.

2) 二项式$(ax+b)^n(a,b\in\mathbf{R})$的展开式通项为$T_{k+1}=C_n^k(ax)^{n-k}b^k=a^{n-k}b^kC_n^kx^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$,其中$a^{n-k}b^kC_n^k$为展开式第$k+1$项的系数.

特别地,$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n$.

2 常用性质

2.1 二项式系数相关性质

1)二项式$(a+b)^n$展开式各项的二项式系数的和为2^n,即$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

2)二项式$(a+b)^n$展开式中奇数项的二项式系数和与偶数项的二项式系数和相等,即

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}.$$

3)当n为偶数时,二项式$(a+b)^n$展开式的第$\frac{n}{2}+1$项的二项式系数最大,最大值为$C_n^{\frac{n}{2}}$;当n为奇数时,二项式$(a+b)^n$展开式的第$\frac{n+1}{2}$项、第$\frac{n+3}{2}$项的二项式系数相等且同时取得最大值,即

$$C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}.$$

2.2 赋值法求展开式系数和

设$(ax+b)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$,其中$a,b\in\mathbf{R}$.

当$x=0$时,$c_0=b^n$.

当$x=1$时,$c_0+c_1+c_2+\cdots+c_n=(a+b)^n$.

当$x=-1$时,有

$$c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots+(-1)^nc_n=(b-a)^n.$$

从而

$$c_0+c_2+c_4+c_6+\cdots=\frac{(a+b)^n+(b-a)^n}{2},$$

$$c_1+c_3+c_5+c_7+\cdots=\frac{(a+b)^n-(b-a)^n}{2}.$$

解析 由题意知通项为$T_{r+1}=C_6^r(x^2)^{6-r}\cdot[(ax)^{-1}]^r=C_6^r x^{12-3r}a^{-r}$,当$r=3$时得到$x^3$项的系数为$C_6^3a^{-3}=\frac{5}{2}$,解得$a=2$.

变式2 已知$(x-\frac{1}{2x})^6$的展开式中二次项系数的最大值与$(x+\frac{a}{x})^3$的一次项系数相等,则a的值为________.

解析 $(x-\frac{1}{2x})^6$的展开式中二项式系数的最大值为C_6^3,$(x+\frac{a}{x})^3$的通项公式为$T_{r+1}=a^rC_3^rx^{3-2r}$,当$r=1$时,一次项系数为$3a$,所以$3a=C_6^3$,则$a=\frac{20}{3}$.

总之,对于二项式定理“系数”的考查,主要题型有求特定项的系数(二项式系数)、求系数(二项式系数)的最大(或最小)项、与系数有关的参数问题以及综合应用等.我们在解答与二项式定理系数有关的问题时,一般是先利用通项公式进行化简,根据题设条件列出关系式,然后再利用其他相关知识来求解.

(完)