



恰当选择研究角度,巧妙破解排列组合问题

俞 纲¹ 周继波²

(1. 云南省昆明市第三中学 2. 云南省昆明市第十六中学)

排列组合与计数问题的计算是围绕着事件的完成来展开的,而完成事件的角度往往不止一种.从不同的角度来完成事件其复杂程度各不相同,这就需要我们多思考、多总结,学会选择恰当的角度来完成事件,以达到事半功倍、化繁为简的效果.

 **例 1** 学校安排全校六个年级的同学去春游,有四个公园可供选择,每个年级去一个公园,则共有多少种不同的安排方法?

 **解析** 此题常见的研究角度有两种:如果从公园“接纳”学生的角度来完成事件,由于每个公

园“接纳”了哪几个年级不确定,而第一个公园“接纳”年级的每一种情况对下一个公园“接纳”哪些年级会产生不同的影响,这样研究就会比较复杂,难以用一个算式直接描述;如果从学生选择公园的角度来完成此事件,由于每一个年级都是从四个不同公园中选出一个,且相互没有影响,则运用乘法原理,每个年级逐一选择,所有情况数共有 $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$ 种.



点评 如果完成一个事件有多个步骤,则研究事件的角度应该尽量让每个步骤之间相互独立或具体明确前一步骤对后一步骤的影响.

对 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, |x| < 1$ 两边求导得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots, |x| < 1.$$

令 $x = 1 - p$, 得 $\frac{1}{p^2} = 1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + 4(1-p)^3 + \dots$, 所以

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

由性质 2 得 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, 其中

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p, \text{ 且 } \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x +$$

$3x^2 + 4x^3 + \dots, |x| < 1$, 于是 $\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots, |x| < 1$, 两边求导得

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \dots, |x| < 1.$$

令 $x = 1 - p$, 得

$$\frac{2-p}{p^3} = 1 + 2^2(1-p) + 3^2(1-p)^2 + 4^2(1-p)^3 + \dots,$$

$$\text{则 } E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} =$$

$$\frac{2-p}{p^2}, \text{ 所以}$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2},$$

故 X 的数学期望和方差分别为 $\frac{1}{p}$ 和 $\frac{1-p}{p^2}$.

注: 实际上, 例 1 中的 X 服从几何分布, 即

$$X \sim G(p), E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$



例 2 流水线上生产的每个产品为不合格品的概率为 p , 当生产出 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 个不合格品时, 即停工检修一次. 求在两次检修之间的产品总数 X 的数学期望和方差.



解析 记第 $i-1$ 个不合格品之后到第 i 个不合格品之间的产品数(包括第 i 个不合格品)为 $X_i, i=1, 2, \dots, n$, 则 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, 且 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 都服从几何分布 $G(p)$, 即对 $i=1, 2, \dots, n$, 有 $P(X_i = k) = (1-p)^{k-1} p, k=1, 2, 3, \dots$, 由例 1 得 $E(X_i) = \frac{1}{p}, D(X_i) = \frac{1-p}{p^2}, i=1,$

$$2, \dots, n. \text{ 由推论 1 得 } E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n}{p}.$$

由 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立和推论 3 得

$$D(X) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

(完)



例 2 从甲、乙、丙、丁、戊、己六人中选四人去四所学校学习,每人去不同学校,其中甲不能去 A 学校,则有多少种不同的安排方法?

解析 此题常见的研究角度有两种:如果以每个同学具体去哪所学校为研究对象就是元素分析法的思想,由于元素甲对位置有限制,而甲又不一定被选出,由此必须分为选到甲和没选到甲两类情况,其总情况数为 $3 \times A_5^3 + A_5^4 = 300$;如果以每所学校“接纳”哪位同学为研究对象就是位置分析法的思想,从 A 学校开始逐一选元素所有情况数为 $5 \times A_5^3 = 300$.

点评 元素分析法与位置分析法是解决排列问题最典型的两种方法,它们分别从“元素选位置”和“位置选元素”两种角度完成事件,具体使用时一定要观察哪种角度更方便.

例 3 经过正方体任意两个顶点的所有直线中,异面直线共有多少对?

解析 如果从所有连线中直接研究异面直线的对数,正方体 8 个顶点共可以连接 $C_8^2 = 28$ 条直线,这其中包含三类线段所在的直线,分别是正方体的棱有 12 条,面对角线有 12 条,体对角线有 4 条,再研究两条直线出自以上三类的各种情况,可分为两条棱、两条面对角线、一条棱一条面对角线、一条棱一条体对角线、一条面对角线一条体对角线共 5 类情况来研究;如果以两异面直线必涉及四个不共面顶点为研究对象,则先选出不共面的四个顶点,再由它们产生两对异面直线即可,由此分两类研究:一类是上底一个顶点且下底三个顶点,或上底三个顶点且下底一个顶点,共有 $2 \times C_4^1 \times C_4^3 = 32$ 种取法,另一类是上底下底各选两个顶点,为保证四点不共面,则上底是相邻两顶点时对应下底 4 种选法,上底是相对两顶点时对应下底 5 种选法,则共有 $4 \times 4 + 2 \times 5 = 26$ 种选法,最终产生的异面直线的对数为 $(32 + 26) \times 2 = 116$ 对.

点评 把“零散”的研究对象先组合为整体来观察,这种“化零为整”,先整体后局部的研究角度有利于解决异面直线对数、直线交点个数等几何问题.

例 4 (1)四个人坐一排八个座位,其中恰好有两个空座位相邻,则有多少种不同方法?

(2)八人参加 100 米比赛,没有并列,其中甲、乙比丙、丁、戊先到达有多少种不同情况?

解析 (1)如果用人选座位的元素分析法,则情况比较复杂,需要逐一列举研究;如果先从八

个座位中选出满足条件的四个座位再坐人,结合“相邻”与“不相邻”的特征,不少同学会运用捆绑法与插空法,先把两个空座位捆绑为一个空位后整体看成 7 个空座位再运用插空法,但发现 7 个座位旁边再插入四个同学位置就多了,这该如何理解?其实此题的研究对象不是孤立的座位与孤立的人,而应该把坐在座位上的同学和该座位看成一个整体对象,由此本题的研究对象应该为两个相同的空座位、一个特殊的空座位及四位坐着座位的同学,根据插空法,先把四位坐着座位的同学排序,产生五个空隙后,选一个插入特殊空座位,选两个插入两个同类的空位,则情况数为

$$A_4^4 \times C_5^2 \times C_4^2 = 720.$$

(2)如果直接用位置分析法或元素分析法,都要通过列举法把满足条件的形式列出来,这样相对麻烦;如果把问题形象看成按照甲、乙在前,丙、丁、戊在后的结构确定五人相对位置,再依次插入另外三人,则后三人的插入不会改变前五人的相对顺序,问题得到巧妙解决,但值得注意的是,后三人可以相邻,因此插入时要“先后逐一”插入,即每插入一人,空隙就会增加一个,则情况数为 $A_2^2 \times A_3^3 \times 6 \times 7 \times 8 = 4\,032$.此题还可以研究甲、乙、丙、丁、戊五人的任意排序中满足甲、乙在丙、丁、戊前面的概率 $p = \frac{A_2^2 \times A_3^3}{A_5^5}$,则八人

任意排序中,满足条件的情况数为 $A_8^8 \times \frac{A_2^2 \times A_3^3}{A_5^5} = 4\,032$ 种.

例 5 甲、乙、丙、丁等七人各自选择周一至周日中的一天值日,每人选择不同的一天.

(1)甲不在周一,乙不在周日,则共有多少种安排方法?

(2)甲不在周一,乙不在周日,且若丙在周三,则丁不在周四,则有多少种不同的安排方法?

解析 (1)正面研究要分为甲在周日和甲不在周日两种情况计算;若用间接法,则不用分类,这体现了“正难则反”的研究角度,但值得注意的是恰当运用逻辑与集合的相关知识来理解其对立事件的含义,如语句“ p 且 q ”的否定是“非 p 或非 q ”,又如 $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$,由此用间接法计算可得情况数为

$$A_7^7 - (A_6^6 + A_6^6 - A_5^5) = 3\,720 \text{ 种}.$$

(2)由于条件语句的逻辑关系比较复杂,在七人全排列的角度下,无论是正面研究还是用间接法都比



较烦琐.这时我们可以把研究角度聚焦在第(1)问的范围内,用集合语言来描述,即

$$\text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(\complement_A B),$$

即用“甲不在周一且乙不在周日”的总情况数减去“甲不在周一乙不在周日且丙在周三丁在周四”的情况数,则可以直接计算出情况数为

$$3\,720 - (A_5^5 - 2A_4^4 + A_3^3) = 3\,642 \text{ 种}.$$



点评

间接法是我们经常使用的一种研究方法,但要注意借助集合与逻辑的知识理解一个事件的对立事件的含义.对于“ p 且 q ”类型的事件可以采用“局部间接法”,即研究角度只需聚焦在 p 成立的情况下,用 p 成立的情况数减去 p 成立且 q 不成立的情况数.



例6

某小组十个人中只会唱歌的有三个人,只会跳舞的有三个人,既会唱歌又会跳舞的有四个人,从中选出不同的三个人去唱歌,三个人去跳舞,有多少种不同的选法?



解析

此题若是根据既会唱歌又会跳舞的同学(以下简称“多面手”)做什么来分类,由于“多面手”人数较多,分类情况就会很复杂,比如,选出三名“多面手”就要考虑这三人分别做什么,这样就有三人都唱歌、二人唱歌一人跳舞、一人唱歌二人跳舞、三人都跳舞共4个小类;如果把研究角度再具体,按照“多面手”出来唱歌的有多少人分类,整体只分四类情况即可.情况一,“多面手”去唱歌有零人,则只会唱歌的要选出三人,而剩余“多面手”都可以参与到跳舞的备选对象中,这样情况数为 $C_4^0 \times C_3^3 \times C_7^3$,其余情况类似,则最终所有情况数为 $C_4^0 \times C_3^3 \times C_7^3 + C_4^1 \times C_3^2 \times C_6^3 + C_4^2 \times C_3^1 \times C_5^3 + C_4^3 \times C_3^0 \times C_4^3 = 471$.



点评

对于人数较多的“多面手”问题,以“多面手”做某一件事的人数为研究对象进行分类,情况会相对简单不少.



例7

如图1所示,在六个区域中涂上颜色,有五种颜色可供选择,要求每个区域只涂一种颜色,相邻区域所涂颜色不同,则不同的涂色方法总数为多少种?

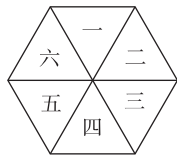


图1



解析

此题若按一至六号区域先后涂色的研究顺序来完成,则一号区域可以有5种颜色选择,二号区域颜色与一号区域不同,所以可以有4种颜色选择.同理三至五号区域都可以有4种颜色选择,

而六号区域颜色要与一号与五号区域都不同.这就需要考虑到一号与五号区域是否同色,而这受一号区域与四号区域是否同色影响,同时又受一号区域与三号区域是否同色影响……这样分类研究比较复杂.若按照一、三、五号区域同时涂色,则二、四、六号区域就被分隔开,其可用颜色也就确定,这样分类情况就少得多.具体分为三类:若一、三、五号区域同色,则二、四、六号区域各自可用4个色,情况数为 $5 \times 4 \times 4 \times 4 = 320$ 种;若一、三、五号区域恰有2个同色,则二、四、六号区域恰有2个区域可用3个色,1个区域可用4个色,情况数为 $C_3^2 \times A_5^2 \times 4 \times 3 \times 3 = 2\,160$ 种;若一、三、五号区域都不同色,则二、四、六号区域各自可用3个色,情况数为 $A_5^3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1\,620$ 种.由此总情况数为4 100种.



点评

对于复杂的涂色问题,可以把某几块区域同时涂色,从而把剩下区域独立分割开再各自涂色,以此降低思维难度.



例8

甲、乙、丙、丁、戊、己六位同学的六张试卷放在一起,每人拿一张试卷,恰好所有同学都拿错试卷的情况共有多少种?



解析

如果按照顺序六人依次拿,由于前一位同学所拿试卷不确定,则后一位同学能拿的试卷也就相应不同,这样相互影响的因素太多,只能逐一列举.如果我们用“动态”的眼光看问题,甲先拿试卷,甲拿到谁的试卷,该同学就第二个拿,则整体分两类情况即可.情况一:第二位同学拿甲的试卷,即前两位同学互相拿了试卷,只需剩下4位同学不拿自己的即可;情况二:第二位同学拿了第三位同学的试卷,这时相当于第二位同学及他的试卷都被抽走了,整体等效看成“没有第二位同学出现”,而是第一位同学直接拿走第三位同学的试卷,整体情况数就等价于五位同学都不拿自己试卷的情况数.由此记 $k(n)$ 表示 n 个人不拿自己试卷的情况数,则 $k(6) = 5 \times [k(4) + k(5)]$.同理可得

$$k(5) = 4 \times [k(3) + k(4)],$$

$$k(4) = 3 \times [k(2) + k(3)],$$

而通过列举法,我们得到 $k(2) = 1, k(3) = 2$,从而 $k(4) = 9, k(5) = 44, k(6) = 265$,问题得到解答.



点评

对于一些复杂的问题,可用“动态”的眼光来观察,并借助数列等其他知识进行等价转化,从而形象解决.

(完)