



二项式定理相关题型的求解方法和技巧

王 凯

(安徽省淮北市第七中学)

二项式定理是高中数学中的一个重要知识点,也是高考命题的热点,高考重点考查通项公式的应用.本文举例说明二项式定理相关题型的求解方法和技巧.

1 二项展开式

例 1 用二项式定理展开 $(2x - \frac{3}{2x^2})^5$.

解析 $(2x - \frac{3}{2x^2})^5 = C_5^0 (2x)^5 + C_5^1 (2x)^4 \cdot (-\frac{3}{2x^2}) + C_5^2 (2x)^3 (-\frac{3}{2x^2})^2 + C_5^3 (2x)^2 (-\frac{3}{2x^2})^3 + C_5^4 2x (-\frac{3}{2x^2})^4 + C_5^5 (-\frac{3}{2x^2})^5 = 32x^5 - 120x^2 + \frac{180}{x} - \frac{135}{x^4} + \frac{405}{8x^7} - \frac{243}{32x^{10}}.$

2 求常数项

例 2 $(x^2 + \frac{1}{2x})^6$ 展开式中的常数项为_____.

解析 $(x^2 + \frac{1}{2x})^6$ 的展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_6^r \cdot (x^2)^{6-r} \cdot (\frac{1}{2x})^r = C_6^r \cdot (\frac{1}{2})^r \cdot x^{12-3r}.$$

令 $12-3r=0$, 解得 $r=4$, 则展开式的常数项为

$$C_6^4 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{15}{16}.$$

3 求指定项的系数

例 3 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为().

A. 10 B. 20 C. 30 D. 60

解析 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot (x^2+x)^{5-r} \cdot y^r$, 令 $r=2$, 则 $T_3 = C_5^2 \cdot (x^2+x)^3 \cdot y^2$, 又 $(x^2+x)^3$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_3^k \cdot (x^2)^{3-k} \cdot x^k = C_3^k \cdot x^{6-k}$, 令 $6-k=5$, 则 $k=1$, 所以

$(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为 $C_5^2 C_3^1 = 30$, 故选 C.

4 求有理项

例 4 二项式 $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^{40}$ 的展开式中, 有理项的项数共有().

A. 4 项 B. 5 项 C. 6 项 D. 7 项

解析 $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^{40}$ 的展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_{40}^r \cdot (\sqrt{x})^{40-r} \cdot (\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^r = C_{40}^r \cdot x^{\frac{120-5r}{6}}.$$

因为 $0 \leq r \leq 40$, 且 $r \in \mathbf{N}$, 所以当 $r=0, 6, 12, 18, 24, 30, 36$ 时, $\frac{120-5r}{6} \in \mathbf{Z}$. 在二项式 $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^{40}$ 的展开式中, 有理项的项数共有 7 项, 故选 D.

5 求二项式系数最大的项或展开式系数最大的项

例 5 $(1+2x)^n$ 的展开式中第 6 项与第 7 项的系数相等, 则展开式中二项式系数最大的项为_____; 展开式系数最大的项为_____.

解析 $T_6 = C_n^5 (2x)^5, T_7 = C_n^6 (2x)^6$, 依题意有 $C_n^5 2^5 = C_n^6 2^6$, 则 $n=8$, 所以 $(1+2x)^8$ 的展开式中, 二项式系数最大的项为

$$T_5 = C_8^4 (2x)^4 = 1120x^4.$$

设第 $r+1$ 项系数最大, 则有

$$\begin{cases} C_8^r \cdot 2^r \geq C_8^{r-1} \cdot 2^{r-1}, \\ C_8^r \cdot 2^r \geq C_8^{r+1} \cdot 2^{r+1} \end{cases} \Rightarrow 5 \leq r \leq 6,$$

所以 $r=5$ 或 6 (因为 $r \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$), 则系数最大的项为 $T_6 = 1792x^5$ 或 $T_7 = 1792x^6$.

6 求参数的值

例 6 若 $(x^2-a)(x+\frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中 x^6 的系



数为 30, 则 $a =$ _____.



解析

$(x + \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_{10}^r \cdot x^{10-r} \cdot (\frac{1}{x})^r = C_{10}^r \cdot x^{10-2r},$$

令 $10-2r=4$, 解得 $r=3$, 所以 x^4 项的系数为 C_{10}^3 ; 令 $10-2r=6$, 解得 $r=2$, 所以 x^6 项的系数为 C_{10}^2 , 所以 $(x^2 - a)(x + \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中 x^6 的系数为 $C_{10}^3 - aC_{10}^2 = 30$, 解得 $a=2$.

7 求代数式的值



例 7 (多选题) 若 $(1-2x)^{2023} = a_0 + a_1x + \dots + a_{2023}x^{2023}$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 ().

A. $a_0 = 1$

B. $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2023} = \frac{3^{2023} + 1}{2}$

C. $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022} = \frac{3^{2023} - 1}{2}$

D. $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2023}}{2^{2023}} = -1$



解析

由题意, 当 $x=0$ 时, $a_0 = 1^{2023} = 1$, 故 A 正确.

当 $x=1$ 时, 有

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023} = (-1)^{2023} = -1;$$

当 $x=-1$ 时, $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{2023} = 3^{2023}$. 因此

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2023} = -\frac{3^{2023} + 1}{2},$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022} = \frac{3^{2023} - 1}{2},$$

故 B 错误, C 正确. 因为

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2023}}{2^{2023}} =$$

$$a_1 \times \frac{1}{2} + a_2 \times (\frac{1}{2})^2 + \dots + a_{2023} \times (\frac{1}{2})^{2023},$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 有

$$0 = a_0 + a_1 \times \frac{1}{2} + a_2 \times (\frac{1}{2})^2 + \dots + a_{2023} \times (\frac{1}{2})^{2023},$$

所以 $a_1 \times \frac{1}{2} + a_2 \times (\frac{1}{2})^2 + \dots + a_{2023} \times (\frac{1}{2})^{2023} = -a_0 = -1$, 故 D 正确.

综上, 选 ACD.

8 求解整除性问题



例 8 中国南北朝时期的著作《孙子算经》中, 对同余除法有较深的研究. 设 a, b, m ($m > 0$) 为整数, 若 a 和 b 被 m 除得的余数相同, 则称 a 和 b 对模 m 同余, 记为 $a \equiv b \pmod{m}$. 若 $a = C_{20}^0 + C_{20}^1 \times 3 + C_{20}^2 \times 3^2 + \dots + C_{20}^{20} \times 3^{20}$, $a \equiv b \pmod{5}$, 则 $b =$ ().

A. 2 004 B. 2 005 C. 2 025 D. 2 026



解析

若 $a = C_{20}^0 + C_{20}^1 \times 3 + C_{20}^2 \times 3^2 + \dots + C_{20}^{20} \times 3^{20}$, 由二项式定理得 $a = (1+3)^{20} = 4^{20} = (5-1)^{20}$, 则

$$a = C_{20}^0 \times 5^{20} - C_{20}^1 \times 5^{19} + \dots - C_{20}^{19} \times 5 + C_{20}^{20},$$

因为 $C_{20}^0 \times 5^{20} - C_{20}^1 \times 5^{19} + \dots - C_{20}^{19} \times 5$ 能被 5 整除, 所以 a 除以 5 余 $C_{20}^{20} = 1$, 又因为 $a \equiv b \pmod{5}$, 选项中 2 026 除以 5 余 1, 故选 D.

9 近似计算



例 9 $1.02^8 \approx$ _____ (小数点后保留三位数).



解析

$1.02^8 = (1+0.02)^8 = 1 + C_8^1 \times 0.02 + C_8^2 \times 0.02^2 + C_8^3 \times 0.02^3 + \dots + C_8^8 \times 0.02^8 \approx 1 + C_8^1 \times 0.02 + C_8^2 \times 0.02^2 + C_8^3 \times 0.02^3 \approx 1.172$.

10 与函数的交会问题



例 10 设 $f(x) = \begin{cases} (x - \frac{1}{x})^6, & x < 0, \\ -\sqrt{x}, & x \geq 0, \end{cases}$ 则当 $x > 0$ 时, $f(f(x))$ 表达式的展开式中常数项为 ().

A. -20 B. 20 C. -15 D. 15



解析

当 $x > 0$ 时, $f(x) = -\sqrt{x} < 0$, 故 $f(f(x)) = f(-\sqrt{x}) = (-\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^6$, 其

展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_6^r \cdot (-\sqrt{x})^{6-r} \cdot (\frac{1}{\sqrt{x}})^r =$$

$$(-1)^{6-r} \cdot C_6^r \cdot (\sqrt{x})^{6-2r}.$$

令 $6-2r=0$, 得 $r=3$, 故常数项为 $(-1)^3 \cdot C_6^3 = -20$, 选 A.

(完)