

情景为线素养为核 构建有效数学课堂

——以“分类加法计数原理与分步乘法计数原理”教学设计为例

王 晖

(金华第一中学 浙江 金华 321000)

摘 要:文章以人教A版高中《数学(选修3)》第6.1节“分类加法计数原理与分步乘法计数原理”的教学为例,以问题的情景线、概念的知识线为表,以提升数学素养为核心,创设有效的教学情境,构建具有活力的数学课堂,让枯燥的概念教学立体起来、丰富多彩起来。

关键词:核心素养;分类加法计数原理;分步乘法计数原理

中图分类号:O122.4

文献标识码:A

文章编号:1003-6407(2022)10-0020-05

1 教学内容与核心素养解析

“分类加法计数原理与分步乘法计数原理”是高中《数学(选修3)》第六章“计数原理”的起始课.计数问题是数学中重要的研究对象之一,也是人们在生产生活实践活动中常见的问题.人们在解决这类问题中获得了认识客观世界的一种最基本

的数学方法.处理这类问题是一个研究数学和抽象数学原理的过程,解决这类问题的方法包含了求和法则、乘积法则.当需要完成一件事情时,先把它看成一个复杂的抽象问题,然后用辨析、分解、简化的方式来处理,包括分“类别”型即分类加法计数原理和分“步骤”型即分步乘法计数原理两种.这两

(上接第19页)

推广2 若 $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i+1} < \ln(1+n) < \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{n}{2(n+1)}$.

证明 由推广1可得

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{2n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1+n),$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{n}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

得证.

推广2可以应用于真数为正整数的对数的估计,也可应用于离散型级数求和的估计^[3].

对数均值不等式的证明方法灵活,形式也多样,以上展示的证明方法具有一定的典型性.对数不等式不仅可以进行拓展延伸得到许多不等式结果,也可以应用于例如极值点偏移等一系列问题,因此对该不等式的研究是有意义和价值的.

参 考 文 献

- [1] 何彦.用对数均值不等式解决一类导数问题[J].数学通讯,2020(12):19-21.
- [2] 谈凤霞.对数均值不等式的证法及应用[J].中学数学杂志,2019(3):30-32.
- [3] 屈惠鹏,韩改琴.用对数均值不等式证明数列不等式[J].高中数学教与学,2020(7):8-10.

收文日期:2022-07-30;修订日期:2022-08-30

作者简介:王 晖(1980—),男,湖北襄阳人,中学一级教师.研究方向:数学教育.

个计数原理蕴涵了从具体到抽象、从特殊到一般,以及分类、类比与化归的思想.

本节课重在从计数问题的实际例子出发,概括出分类加法计数原理,然后通过类比的方法得出分步乘法计数原理.本节课在教学上探索以情景、知识为线,以数学素养为核,通过创建有效有趣的课堂方式,引导学生观察生活中的计数问题,帮助学生从用枚举法解决计数问题上升到建立更一般有效的计数原理来解决问题,把朦胧的数学意识上升到理性的认知.从知识的连续性与整体性角度来看,本章遵循“概括原理—抽象模型—推导公式”的数学规律,在原理的基础上建立了排列组合模型和基本的计算公式,而这些模型、公式在解决计数问题时会更加简洁、方便、实用,体现了知识内容的层层递进与螺旋上升.这些内容也是今后学习概率统计及进一步学习高等数学中有关内容的知识理论基础.

《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出了高中数学六大核心素养,要求“基于数学学科核心素养的教学活动应该把握数学的本质,创设合适的教学情境,提出合适的数学问题,引发学生思考与交流,形成和发展数学学科核心素养”.本教学设计主要是创设合适的数学情景,以“问题链”的方式提出合适的数学问题,让学生在解决问题的过程中,感知内容的必要性,明确基本思路与方法,提炼问题蕴涵的数学原理,掌握研究数学的基本范式.教学过程的核心是“发现、抽象原理”,引导学生观察生活、归纳抽象、建立模型、学会表达、主动应用,有效提升数学核心素养.

教学重点:通过具体实例归纳类比、抽象概括两个基本计数原理,并解决实际问题.

2 教学目标和目标解析

教学目标:理解两个原理,会用两个原理解决一些简单的计数问题.

目标解析:1)通过具体的实例,抽象概括两个计数原理;2)理解完成一件事情的含义,明确分类与分步;3)理解分类之中有分步、分步之中有分类等问题;4)观察生活,了解生活与数学,应用数学.

3 教学问题诊断分析

学生在义务教育阶段已经具备了一定的计数

能力,对树形图、列举法计数都有一定的了解,拥有观察、思考、分析的能力,具备学习本节课所需的知识.

但“完成一件事情”是计数原理中让学生感到抽象且难以理解的概念,学生难以抓住要解决的主要问题特征,很难正确区分“分类”与“分步”.

教学难点:根据要完成的一件事,理解这一件事的含义,明确“分类”与“分步”,熟练选择两个计数原理解决问题.

4 教学支持条件

教师准备:多媒体课件(以PowerPoint为平台)等教具.

学生准备:笔、纸等学具.

5 教学过程设计

古希腊数学家毕达哥拉斯曾说“万物皆数.”“数”是数学的主要研究对象之一,它起源于“数”(shǔ),即“计数”.计数在人类还是原始社会时就开始了,一直到现代文明,都是非常重要的人类活动.随着现在信息化的发展,我们会面临各种复杂甚至大型的“计数”问题,因此仅用枚举法计数是远远不够的,也是比较麻烦甚至困难的.我国古代数学家刘徽曾说“事类相推,各有攸归,故枝条虽分而同本干知,发其一端而已.又所析理以辞,解体用图,庶亦约而能周,通而不黜,览之者思过半矣.”当我们面对新的更加复杂困难的问题时,要学会从同类型的问题里寻找主要的特征,通过深入剖析,在归纳、猜想、抽象的基础上得到更一般的方法原理.本节课我们通过解决现实中实际的问题,探寻出“计数”的简便易行的方法,即两个基本计数原理.

5.1 观察生活,问题引入

呈现车辆保有量统计数据及公路汽车行驶的图片.

问题1 杭州市车牌号码是浙A×××××,后面可以是阿拉伯数字也可以是英文字母,其中数字来自0~9这10个数字,字母是A~Z这26个英文字母,问:可以产生多少个不同的车牌号码?

意图 从学生熟悉的车牌实例出发,让学生意识到用枚举法解决此类问题的不可能性,已有的知识方法不能解决新的复杂问题,认知与实际问题的起

了冲突,需要探寻更简便、有效的方法.

师生活动 学生思考回答,教师参与讨论.

5.2 实例探究,归纳原理

问题2 新一届亚运会将在杭州举行,小明准备从A地到杭州观看亚运会开幕式,在一天之中,可以乘火车和汽车两种交通工具去,其中火车有12趟,汽车有8班,那么小明从A地到杭州共有多少种不同的走法?

意图 从学生感兴趣的事例为切入点,设计可以感受的情景,初步体会分类加法计数原理.

师生活动 学生思考回答,小明从A地到杭州有两类不同的方案,乘坐火车或乘坐汽车,其中火车有12趟,汽车有8班,总共有 $12+8=20$ 种不同的方法.

问题3 亚运会主指挥室有很多座位,如果用26个英文字母或0~9这10个数字给座位编号,总共能编出多少个不同的座位号码?

意图 以亚运会为主线,层层递进,给学生提供典型例证,发现不同背景下的计数问题的计数方法是一样的.

师生活动 学生思考回答,因为给座位编号可以用26个英文字母,有26种,也可以用0~9这10个数字,有10种,所以总共有 $26+10=36$ 种.

探究1 问题2和问题3具有什么样的共同特征?

意图 引导学生抓住问题的主要特征,并能概括出来,叙述计数过程的基本环节,为抽象概括分类加法计数原理做准备.

师生活动 学生自主思考,接着以4人小组为单位展开讨论,通过教师引导,让学生结合上述两个实际的例子总结得到如下共同特征:

- 1) 对“完成一件事”有不同的方法进行计数.
- 2) 该计数过程的基本环节是:

①确定分类标准,分为两类,每类都能单独完成这件事;

②分别计算各类情况的个数;

③各类情况个数相加.

问题4 你能举一些生活中类似的例子吗?

意图 学生自己举例说明,有利于学生理解“完成一件事”这一抽象概念,进一步明确分类计

数过程的基本环节.

师生活动 学生举例,教师引导学生分析特征.

问题5 你能用自己的语言归纳并简洁概括这类问题的解决方法吗?需要明确哪些要点?

意图 归纳概括分类加法计数原理,引导学生学会提炼,学会表达.

师生活动 学生思考回答,教师板书教材第2页的定义.一般地,有如下分类加法计数原理:完成一件事情有两类不同方案,在第1类方案中有 m 种不同的方法,在第2类方案中有 n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=m+n$ 种不同的方法.学生回答,关键是明确“分类”与“加法”.

问题6 杭州亚运村商店出售各种不同的明信片,其中印有亚运吉祥物的不同明信片有6套,风景类的不同明信片有10套,小明从中选一套共有多少种不同的选法?

意图 巩固概念,加深对原理的理解,会用原理解决简单问题.

师生活动 学生自主分析完成本题,师生共同分析要完成的“一件事”是“选择一套明信片”,完成它可分2类,每类都能单独完成这件事,符合分类加法计数原理的特征,共有 $10+6=16$ 种选法.

探究2 上述分类加法计数原理,能否推广到一般情形,应该如何表述?

意图 培养学生的抽象概括能力,体会从特殊到一般的思想,引导学生借助实例理解分类加法计数原理的推广形式,并引导学生学会正确表述数学原理.

师生活动 学生先自主思考,然后讨论汇报,给出分类加法计数原理的一般情形的表述.教师适时给出实例:杭州亚运村商店出售各种不同的明信片,其中印有亚运吉祥物的不同明信片有6套,风景类的不同明信片有10套,历史类的不同明信片有8套,小明从中选一套共有 $6+10+8=24$ 种不同的选法.

问题7 亚运会主指挥室有很多座位,如果用A、B、C、D、E、F这6个大写英文字母和1~9这9个数字,以英文字母和一个作为小标的阿拉伯数字组成的方式给座位编号,这样的号码总共能编出多

少种?

意图 承上启下,既巩固加法原理,又为引出乘法原理做铺垫,领会“分步”与“乘法”的关系.

师生活动 学生思考回答,教师适时引出树状图,引导学生利用图形直观分析,并列出了所有可能的情况,结合“简化运算”获得问题的“相乘”求法.

探究3 你能说说上述计数过程的基本环节吗?

意图 分析分步计数问题的特征,叙述计数过程的基本环节,为类比概括分步乘法计数原理做准备.

师生活动 学生类比分步加法计数过程的基本环节,得出分步乘法计数过程的基本环节,教师参与讨论.

1) 对“完成一件事”的不同方法进行计数.

2) 该计数过程的基本环节是:

①确定分步标准,分为两步,只有两步都完成,事情才完成;

②分别计算各步情况的个数;

③各步情况个数相乘.

问题8 你能举一些生活中类似的例子吗?

意图 学生自己举例说明,明确分步乘法计数过程的基本环节.

师生活动 学生举例,师生结合实例分析其特征.

问题9 通过类比分步加法计数原理,结合实例,你能概括出分步乘法计数原理吗?

意图 引导学生运用类比的方法,推进知识的发展,概括出分步乘法计数原理.

师生活动 学生类比概括回答,教师参与讨论补充后板书教材第3页的定义.一般地,有如下分步乘法计数原理:完成一件事需要两个步骤,做第1步中有 m 种不同的方法,做第2步有 n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=m \times n$ 种不同的方法.学生回答,关键是明确“分步”与“乘法”.

探究4 上述分步乘法计数原理,能否推广到一般情形,应该如何表述?

意图 培养学生的抽象概括能力,体会从特殊到一般的思想,借助实例理解分步乘法计数原理的推广形式,并引导学生学会正确地表述数学原理.

师生活动 学生先举例分析,然后给出分步乘法计数原理的一般情形的表述.教师适时给出实例:亚运会将在杭州召开,假设第一天小明准备从射击、体操、击剑中选一个项目观看,第二天准备从游泳、排球中选一个项目观看,第三天准备从网球、足球、篮球中选一个项目观看,那么小明在这3天中共有 $3 \times 2 \times 3 = 18$ 种不同的节目观看方式.

5.3 比较辨析,内化理解

问题10 分类加法计数原理和分步乘法计数原理的异同点是什么?

意图 对两个相近相似的概念进行比较辨析,可以深刻地理解概念的内涵,探寻到数学原理的本质.因此引导学生辨析理解两个计数原理,明确“完成一件事”的具体含义,是如何完成的,明晰“类类独立、步步相连”的要求.

师生活动 学生思考回答,师生共同补充完善.

5.4 演练反馈,巩固提升

例1 杭州亚运会的一组志愿者全部通晓中文,并且每个志愿者还都通晓英语、法语、日语中的一种,其中会英语的志愿者有5人,会法语的志愿者有3人,会日语的志愿者有2人.

1) 从这一组志愿者选取1人,共有多少种不同选法?

2) 从会英语、法语、日语的志愿者中分别选取1人,共有多少种不同选法?

3) 从中任选2名会不同种外语的志愿者,共有多少种不同选法?

4) 因工作安排需要,上午需从会英语或法语的志愿者中选1人,下午需从会日语的志愿者中选1人,则共有多少种不同选法?

意图 通过该例题的设计,加深学生对于两个计数原理解决计数问题的理解,明确是分类完成还是分步完成,同时还要能够处理分类之中有分步、分步之中有分类的情况.

师生活动 学生思考作答,师生相互合作交流.

问题11 解决计数问题的一般思维过程是怎样的?

意图 概括解决计数问题的一般步骤.

师生活动 学生思考概括,教师加以补充完善.

练习1 杭州地区的车牌号码是浙A×××××,后面可以是数字也可以是英文字母,其中数字来自0~9这10个数字,字母是A~Z这26个英文字母,问:可以产生多少个不同的车牌号码?

变式1 若要求数字与字母均不重复,则又有多少种不同的车牌号码?

意图 学生在学习了两个计数原理后,再次提出课堂开始时的问题,学生可以比较轻松地应用所学原理解决它,让学生在课堂教学中有收获感和成就感.同时引导学生观察生活中出现的各类数学问题,能将生活中的问题抽象为数学问题,并通过建立模型或应用数学原理解决实际问题.

师生活动 请学生上台讲解,其他学生补充,教师归纳点评.

5.5 总结反思,升华认知

- 1) 通过本节课的学习,你学会了哪些方法?
- 2) 上述方法体现了什么数学思想?

意图 培养学生总结反思的习惯,鼓励学生用自己的语言简洁地概括所研究的问题,并有意训练学生将具体问题上升到抽象“思想”的能力.

师生活动 学生发言,教师点评完善,归纳概括两个计数原理的概念,体会发现、探索、类比、归纳的思维过程.最后教师以一首诗“世事纷纷一局棋,分类分步解千愁.独立相连一辨明,心开慧解乐无忧.”结尾,提升数学文化的涵养.

6 目标检测设计

- 1) 所有的两位数中,个位数字小于十位数字的有多少个?
- 2) n 元集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的子集有多少个?
- 3) 从生活中找寻运用两个计数原理解决的实例并相互交流.

意图 通过设置课后练习探究,巩固对分类加法计数原理与分步乘法计数原理的理解,完成课堂、课外的正向反馈,并引导学生运用数学的视角、数学的思维探寻生活中无处不在的数学问题并解决问题,即“学数学、用数学”.

7 设计说明

本节课是计数原理的起始课,主要是学习两个计数原理,属于概念教学.如何引出问题,然后在解决问题的过程中,从材料数据、情景、问题中提炼概念,抽象概括成定义原理,使得枯燥的概念教学变得生动活泼,从而使学生更好地理解掌握概念、原理,是本节课设计的基本要求.本节课的教学过程按“两条主线,一个核心”展开.两条主线,一是情景线,二是知识线,知识线与情景线相互交融,齐头并进;一个核心就是数学素养.

情景线.首先结合生活中随处可见的例子(如汽车的车牌号的数量),根据统计数据引出一大类问题即计数问题.然后结合杭州亚运会这一热门话题,以亚运会中一系列的计数问题,以组织者、参与者的视角来解决具体的问题,把课堂学习转化成一堂愉快的“亚运之旅”,带着学生在轻松生动的环境中学习知识.

知识线.通过给出生活中的计数问题,基于“简化运算”的思想,引导学生学会观察,从众多例子的共同特征中抽象概括出分类加法计数原理.再将分类加法计数原理推广到一般情形.通过变式问题,引出有些计数问题需要分步骤完成,再通过类比的方法概括出分步乘法计数原理.通过例题及变式的应用,巩固所学知识,深化对原理本质的理解.知识线是知识的发生发展过程,与情景线相互交融,齐头并进.

素养核.提升学生数学核心素养的有效途径之一就是以上“情景线”“知识线”为依托,通过有效的、有趣的情景创设让学生经历数学知识的形成过程,学生不仅积累了数学活动经验,而且在观察、思考、探索、发现、论证等理性思维方面获得训练提升.本设计以引导学生探究两个计数原理为目标,通过举出实例、分析特征、归纳类比、抽象概括、辨析比较、实践应用等,让学生经历由特殊到一般、具体到抽象、感性到理性的科学研究过程,在不断探究发现中促进学生的数学思维,提升学生的核心素养.同时在新课标核心素养思想的指导下,通过构建有效的、有趣的情景,让课堂与生活接轨,与时代接轨,让枯燥的概念课堂生动起来、立体起来、丰富多彩起来.