基于HPM的两个计数原理的“问题串”设计

徐朝梦　李　治
(长江大学信息与数学学院,43400)

摘　要:本文从HPM视角出发,以两个计数原理教学内容为基础设计“问题串”,来构建一个新的课堂教学方法,该方法使用“问题串”引导学生学习、思考与探究,将数学史与两个计数原理知识相结合,提升学生的学习兴趣,营造良好的学习氛围,为实际数学教学方法提供一定的参考.

关键词:HPM;两个计数原理;问题串;教学设计

1. 相关理论的阐述

1.1HPM理论

HPM(History and Pedagogy of Mathematics)是数学史与数学教育关系的简称,是数学教育的一个方向,是对数学史与数学文化的研究.近年来,HPM的教育价值得到了充分肯定.汪晓勤教授为首的团队研究的HPM视角下的数学教学理论框架[1],这对数学史料的选取及融入有很大的指导作用.这套理论可以用“一、二、三、四、五、六”来概括:“一”是“一个历史视角”[2],“二”是两座桥梁[3],“三”是三维目标[4],“四”是数学史融入数学教学的四种方式[5],“五”是数学史融入数学教育的五个原则[6],“六”是HPM的六类教育价值[7].同时,基于HPM视角下的数学教学设计原则、数学史的融入方式、数学史的教育价值,结合HPM的教学实践经验,设计出四个对HPM课例进行评析的指标[8].

随着时代发展,HPM融入数学课堂教学是一种目标,也是课堂教学的新形势.在实际教学中,教师不能生硬地将数学史融入课堂教学中,而要以“问题串”形式,用“问题串”带动学生思考,用“问题串”带动学生学习,用“问题串”展现数学冰冷语言下的火热思想[9].

1.2“问题串”理论

目前,学术界对“问题串”的定义并不统一.通过查阅相关文献可知,“问题串”能够帮助学生在问题中学习知识,理解知识,运用知识,建构知识框架[10].在实际教学中,将一系列问题进行重新设计,重新排列组合,编制“问题串”,让学生在“问题串”中学习,在“问题串”中思考,在“问题串”中找寻数学学习的意义.同时,“问题串”的设计不能主观化,需要从客观角度进行设计,更需要相关理论的支撑.通过查阅相关文献可知,“问题串”的设计需要遵循以下理论:

(1)“问题串”的设计要遵循深度学习原理[11].张佳淳、汪晓勤[12]提出基于深度学习原理与学生的心理认知设计“问题串”;Goldman和Pellegrino[13]则归纳了深度学习原理下的四个学习原则,认为学生的先验知识、知识的内容、知识的组织以及元认知过程有助于增强学生的学习能力.

(2)“问题串”的设计要遵循最近发展区原理[14].问题的设计不仅要立足实际,还要符合学生的心理发展.基于维果斯基提出的“最近发展区”原理可知,设计的问题需要满足学生的最近发展区,搭建知识的“脚手架”帮助学生攀越知识高峰.

(3)“问题串”的设计要遵循“三个步骤”.王先进教授[15]认为问题的有机串联能够达到问题教学的最大化效果,他提出:“问题串”的设计需要首先按认知规律设置教学步骤,根据关键步骤设计“问题串”;然后按阶段任务设置教学环节,根据目标指向设计“问题串”;最后按教材内容提取教学要点,根据要点进行设计.

2. 高中数学课程标准中的两个计数原理

高中数学课程分为必修、选择性必修和选修课程,函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动四条知识主线贯穿高中数学课程内容[16].“计数原理”安排在选择性必修课程中,其内容包括两个计数原理,分别是分类加法计数原理与分步乘法计数原理.两个计数原理的教与学的要求如表1所示[17]:

表1　计数原理的教学要求表

内容要求	教学提示	学业要求
通过实例，了解分类加法计数原理、分步乘法计数原理及其意义.	1.教师通过典型案例开展教学活动，案例的情景应是丰富的、有趣的、学生熟悉的.在案例教学中需要重视过程，层次清楚，从具体到抽象，从实际到理论. 2.在计数原理的教学中，应结合具体情境，引导学生理解许多计数问题可以归结于分类和分步两类问题，引导学生根据计数原理分析问题、解决问题.	1.能够结合具体实例，识别和理解分类加法计数原理和分步乘法计数原理及其作用，并能够运用这些原理解决简单的实际问题. 2.能够结合具体实例，理解排列组合与两个计数原理的关系，并能够解决简单的实际问题，特别是概率中的问题. 3.重点提升数据分析、数学建模、逻辑推理、数学运算和数学抽象素养.

3.教材中的两个计数原理

在人教A版高中数学教材(2019年)选择性必修三的第一章第一节“分类加法计数原理与分步乘法计数原理”中，计数原理内容由三部分组成，分别是分类加法计数原理、分步乘法计数原理及两个计数原理的结合.教材首先以“当问题中的数量很大，一个个列举的方法效率不高，能否设计巧妙的‘数法’以提高效率”引入两种计数原理的学习.对于分类加法计数原理，教材通过问题“用一个大写英文字母或一个阿拉伯数字给教室里的一个座位编号，总共能编出多少种不同的号码?”进行学习，分析这个问题的特征，得出分类加法计数原理的定义及特点.对于分步乘法计数原理，教材通过问题“用前六个大写英文字母和1～9这九个阿拉伯数字，以A_1，A_2，$\cdots$，A_9，B_1，B_2，$\cdots$的方式给教室里的一个座位编号，总共能编出多少种不同的号码?”进行学习，分析这个问题的特征，得出分步乘法计数原理的定义及特点.然后，通过例题对两个计数原理进行练习，让学生总结归纳两个计数原理的使用条件，并进行对比，找出二者的区别与联系.最后，教材给出了两个计数原理的联系与区别以及使用条件.

两个计数原理的课堂教学，重在引导学生学习两个计数原理，寻找其区别与联系.虽然两个计数原理均是完成一件事的方法种数，但是二者既存在区别，亦存在联系.教师需要从学生视角出发，考虑学生的心理认知与学习能力，给出符合学生认知水平与能力要求的教学设计.

我们尝试改变传统“以教材为主、以习题为主、以考试为主”的教学方式，提出基于HPM视角用“问题串”引导学生学习本节内容的新教学方式，帮助学生建构知识框架，认识本节的核心内容，促使课堂呈现一个良好的教学效果.

4.基于HPM设计两个计数原理的“问题串”

本文从HPM视角出发，以两个计数原理内容为基础，基于“问题串”设计的三个原理重新选择、编制数学问题，形成“问题串”，引导学生学习本节内容，完成两个计数原理的教学.

4.1 问题的引入

通过查阅相关文献及数学史料可知，历史上著名的“哥尼斯堡七桥问题”与两个计数原理关系密切，其内容是：在哥德的诞生地普鲁士哥尼斯堡城有一座奈霍夫岛(岛A)，普雷格尔河的两条支流绕它流过，那里有7座桥(a、b、c、d、e、f、g)跨过两条支流，问：一个人能否计划一次散步，使得每一座桥都通过一次而且仅仅一次?[18]

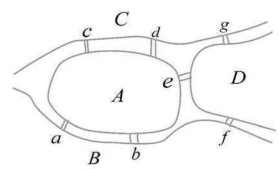

图1　“哥尼斯堡七桥”问题

这个问题令许多数学家困惑不已.大数学家欧拉直接将本问题转化为“一笔画”问题，并成功地解决了此问题.通过欧拉的解法，本题可以简化为：现有A、B、C、D四个点，点之间的连线是可以走通的，在什么情况下，可以通过不重复的方式走完所有的点?

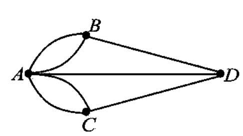

图2　“一笔画”问题简图

通过不断地研究与探索，可以发现“哥尼斯堡七桥问题”是不可解的.因为题目的要求是不重复地走完所有的点，那么通到每个点的线路必须是两条线路或四条路线，即线路的条数必须是偶数.然而，此题通到每个点的线路均是单数，因此不存在一次性走完的情况，故本题无解.欧拉是最早发现这个结果的数学家.他的发现也开创了数学的一个新分支——图论.

4.2 问题的改编

由于这题的解答方法与两个计数原理教学要求

有些差别，所以教师不可直接运用此题进行教学.于是，本节课的目标不是为研究这个“一笔画”问题，而是借本题研究两个计数原理，因而将本题进行改编，使之更贴合于两个计数原理的教学要求.

改编后的问题为：现有A、B、C、D四个点，A是起点，D是终点，B、C均是中转站.如图3，每条线路上标注的数字表示本线路包含方法种类，如A—B，可以选择一条包含2种方法的线路，也可以选择一条包含3种方法的线路，其余路线依此类推.

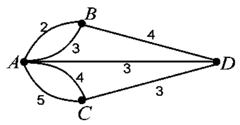

图3

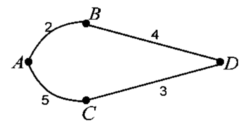

图4

基于历史上著名的“哥尼斯堡七桥”问题，将之改编成符合学生认知水平与学习能力的题目，帮助学生学习两个计数原理.

4.3“问题串”的设计

针对不同的教学内容，考虑设计三个问题，问题1与分类计数原理相联系，问题2与分步计数原理相联系，问题3与两个计数原理混合运用相联系.

问题1需要与分类加法计数原理相结合，用本题引出分类加法计数原理的定义、特点以及使用条件.分类加法计数原理是完成一件事的方案，通过将不同方案的结果相加得到最终结果.因此，本题的问题设计需要涉及到“分类”、“不同方案”、“或”等情况，让学生学习分类加法计数原理的独特之处.问题设计为：

问题1　如图3，A—B的方法一共有多少种？A—C的方法一共有多少种？

此题主要是让学生认识分类加法计数原理.由条件可知，A—B的方法种类是$2+3=5$；A—C的方法种类是$4+5=9$.解答此题时，学生可以充分理解分类加法计数原理的“或”字原则，明确该计数原理是一个分类的过程，是将每种类型的方法数相加，从而得到最后的结果.通过探究本题，学生知道分类加法计数原理的定义，即完成一件事有两类不同的方案，在第1类方案中有m种不同的方法，在第2类方案中有n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m+n$种不同的方法.当题目中出现“有选择性的”“或”等条件时，可以使用分类加法计数原理.

问题2需要与分步乘法计数原理相结合，用本题引出分步乘法计数原理的定义、特点以及使用条件.分步乘法计数原理是完成一件事需要的步骤，通过将统一方案下的不同步骤的结果进行相乘得到最后的结果.因此，本题的问题设计需要涉及到“分步”、“不同步骤”、“和”等情况，让学生学习分步乘法计数原理的独特之处.问题设计为：

问题2　如图4，A—D的路线一共有几条?每条路线的方式分别是几种？

此题主要是让学生认识分步乘法计数原理.由条件可知，A—D的路线共有两条，其中，A—B—D路线的方式是$2\times4=8$；A—C—D路线的方式是$3\times5=15$.解答此题时，学生可以充分理解分步乘法计数原理是一个分步的过程，是将每种类型进行相乘，从而得到最后的结果.通过探究本题，学生知道分步乘法计数原理的定义，即完成一件事需要两个步骤，做第1步有m种不同的方法，做第2步有n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m\times n$种不同的方法.当题目中出现“有步骤的”“和”等条件时，则可以使用分步乘法计数原理.

问题3是两个计数原理的结合使用，用本题引出两个计数原理的区别与联系.本题既可以让学生接触并解决两个计数原理相结合时的问题，从而更深入地理解两个计数原理的内涵及特点；也可以让学生掌握两个计数原理的异同点，面对不同类型的计数原理问题可以做出区分，为后面排列组合与二项式定理的内容做好铺垫.问题设计为：

问题3　如图3，A—D的方法一共有多少种？

此题既包含分类加法计数原理也包含分布乘法计数原理，主要是考察两个计数原理相结合的情况.

首先，A—D的路线有三类(A—B—D，直接A—D，A—C—D)，这明显是分类加法问题；其次，路线A—B—D的方法种类是由路线A—B与路线B—D的方法种类相乘的结果，这明显包含分步乘法计数原理，其中A—B需要分类加法计数原理，于是可得A—B—D的方法种类是$(2+3)\times4=20$.同理可得，A—C—D的方法种类是$(4+5)\times3=27$；然后，直接A—D路线的方法种类是3种.故A—D的不同方法共有$20+27+3=50$种.

本题可以让学生区分两个计数原理，判别二者不同的使用条件，归纳整理二者的区别与联系.

通过以上步骤，基于三类问题，引导学生对两个计数原理内容进行学习，帮助学生构建知识框架，解决学生的疑难问题，增强学习的内驱力.

在课堂小结部分，师生共同回顾本节所学的两个计数原理内容.学生能够自主梳理出两个计数原理的区别与联系，注意使用两个计数原理解决计数

问题时,最重要的是在开始前仔细分析出是“分类”问题还是“分步”问题[19].

5. 结语

本文从HPM视角,运用“问题串”的形式引导学生探究两个计数原理的内涵、特点及使用条件,将数学史融入数学课堂,将数学史变为数学教学的材料,使之成为教学效果的影响因素之一,令数学史发挥出它自身的价值[20].

从HPM的价值看,本节课达到的价值有:(1)知识之谐,以学生的认知心理与学习能力为基础,帮助学生构建两种计数原理的知识框架,符合学生的知识构建过程与认知能力;(2)方法之美.通过课上展示早期数学家如何解决问题,提供解决问题的思维模式,打开学生对数学难题的认知维度与广度,开展启发式教学,提升学生的学习能力;(3)能力之助.本节课以数学史料为主,重新编制问题,设计“问题串”,提升学生的逻辑推理、数学运算和数学抽象素养.

参考文献:

[1] S. R. Goldman, J. W. Pellegrino. Researchon Learningand Instruction: Implications for Curriculum, Instruction, and Assessment[J]. Policy In sights from the Behavioral and Brain Sciences, 2015(1).

[2] 方倩. HPM视角下排列、组合和二项式定理的课例研究[D]. 华东师范大学,2018.

[3] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京:科学出版社,2017:442.

[4] 汪晓勤,欧阳跃. HPM的历史渊源[J]. 数学教育学报. 2003年3期.

[5] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京:科学出版社,2017:442.

[6] 汪晓勤. HPM的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊. 2012年2期.

[7] 汪晓勤. HPM视角下的“角平分线”教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版). 2014年5期.

[8] 沈中宇,邹佳晨,& 汪晓勤. (2017). ICME-13之HPM专题研究综述[J]. 数学教育学报, 26(5), 71-76.

[9] 韩粟. HPM视角下的函数周期性同课异构课例分析[J]. 数学教学,2021(05):7-13.

[10] 汪晓勤. 从古希腊几何难题引出的数学问题[J]. 数学通报,2021,60(03):8-12+17.

[11] 马晓娟. 基于“问题串”的高中数学概念教学设计研究[D]. 宁夏大学,2021.

[12] 赵志佳. 核心素养视域下复数深度学习的教学研究[D]. 哈尔滨师范大学,2021.

[13] 张佳淳,汪晓勤. 基于数学史:轨迹概念教学中的问题串设计——以深度学习的原则为指导[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2020(2):24-29.

[14] 王丹. 最近发展区理论指导下的高中函数教学[D]. 华中师范大学,2011.

[15] 王先进. 谈问题串的设计方法[J]. 数学通报, 2012,51(07):17-19+23.

[16] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年)[M]. 北京:人民教育出版社,2017.

[17] 胡重光. “七桥问题”及其对数学教育的启示[J]. 湖南第一师范学院学报,2011,11(06):14-16+28.

[18] 普通高中数学教科书A版(2019年)[M]. 北京:人民教育出版社,2017:10.

[19] 张冰,蔡春梦,雷沛瑶. HPM视角下的指数函数概念教学设计研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2021(06):5-10.

[20] 沈中宇,李霞,汪晓勤. HPM课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(01):35-41.

(收稿日期:2022-05-11)