关于广义三周期 Fibonacci 序列的二项式系数和的恒等式

刘靖子喆， 张文鹏

(西北大学数学学院, 陕西 西安 710127)

摘要：首先构造了广义三周期 Fibonacci 序列的通项公式, 然后在一定限制条件下, 利用矩阵方法给出了关于广义三周期 Fibonacci 序列和广义三周期 Lucas 序列的一些二项式系数和的恒等式.

关键词：广义三周期 Fibonacci 序列; 矩阵方法; 二项式系数和

中图分类号：O156.1　　**文献标识码**：A

文章编号：1008-5513(2021)01-0038-10

DOI：10.3969/j.issn.1008-5513.2021.01.003

1 引言

众所周知, Fibonacci 序列 $\{F_n\}$ 为

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}(n \geq 2).$$

改变它的初始项, 即得到 Lucas 序列 $\{L_n\}$:

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}(n \geq 2).$$

文献 [1] 研究了关于 Fibonacci 序列 $\{F_n\}$ 和 Lucas 序列 $\{L_n\}$ 的一些二项式系数和的恒等式.

文献 [2] 考虑了关于双周期 Fibonacci 序列和双周期 Lucas 序列的一些二项式系数和的恒等式. 文献 [3] 进一步研究了关于广义双周期 Fibonacci 序列和广义双周期 Lucas 序列的一些二项式系数和的恒等式.

因此, 自然地希望得到关于广义三周期 Fibonacci 序列和广义三周期 Lucas 序列的二项式系数和的恒等式. 设 a, b, c, d 都为实数. 广义三周期 Fibonacci 序列 $\{u_n\}$ 定义

收稿日期：2020-06-11.　　**接收日期**：2020-07-20.

基金项目：国家自然科学基金 (11771351).

作者简介：刘靖子喆 (1992-), 硕士生, 研究方向：数论.

通讯作者：张文鹏 (1958-), 教授, 研究方向：数论.

为

$$u_0=0,\quad u_1=1,\quad u_n=\begin{cases}au_{n-1}+du_{n-2}, & n\equiv 0 \pmod 3,\ n\ge 2,\\ bu_{n-1}+du_{n-2}, & n\equiv 1 \pmod 3,\ n\ge 2,\\ cu_{n-1}+du_{n-2}, & n\equiv 2 \pmod 3,\ n\ge 2.\end{cases} \tag{1}$$

对应地, 广义三周期 Lucas 序列 $\{v_n\}$ 表示为

$$v_0=2,\quad v_1=b,\quad v_n=\begin{cases}av_{n-1}+dv_{n-2}, & n\equiv 0 \pmod 3,\ n\ge 2,\\ bv_{n-1}+dv_{n-2}, & n\equiv 1 \pmod 3,\ n\ge 2,\\ cv_{n-1}+dv_{n-2}, & n\equiv 2 \pmod 3,\ n\ge 2.\end{cases} \tag{2}$$

矩阵方法对于研究 Fibonacci 序列的恒等式是非常有用的, 如文献 [4-5]. 它在本文的讨论中也起着重要的作用.

本文第二节构造了广义三周期 Fibonacci 序列 $\{u_n\}$ 的通项公式. 第三节中, 在一定限制条件下, 利用矩阵方法在给出一系列性质之后, 得到了关于广义三周期 Fibonacci 序列和广义三周期 Lucas 序列的一些二项式系数和的恒等式.

2 广义三周期 Fibonacci 序列的通项公式

在本节中, 构造广义三周期 Fibonacci 序列的通项公式.

由文献 [6] 可知, 广义三周期 Fibonacci 序列 $\{u_n\}$ 的生成函数为

$$G(x)=\frac{x+cx^2+(ac+d)x^3-adx^4+d^2x^5}{1-Ax^3-d^3x^6}, \tag{3}$$

其中 $A=abc+ad+bd+cd$.

定义

$$\alpha=\frac{-A+\sqrt{A^2+4d^3}}{2},\quad \beta=\frac{-A-\sqrt{A^2+4d^3}}{2}.$$

要求 $A^2+4d^3\neq 0$, 即 α,β 是 $x^2+Ax-d^3=0$ 两个不同的根. 有下列性质:

$$\alpha+\beta=-A,\quad \alpha\beta=-d^3,\quad \alpha-\beta=\sqrt{A^2+4d^3}. \tag{4}$$

定理 2.1　广义三周期 Fibonacci 序列 $\{u_n\}$ 的通项公式为

$$\begin{aligned}u_n=&\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}(-ac-d)^{\xi_0(n)}}{\alpha-\beta}\Big[\alpha^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}(\alpha+ad)^{\xi_1(n)}(c\alpha-d^2)^{\xi_2(n)}-\\&\beta^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}(\beta+ad)^{\xi_1(n)}(c\beta-d^2)^{\xi_2(n)}\Big].\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 表示不大于 $\frac{n}{3}$ 的最大整数, 且

$$\xi_i(n)=\begin{cases}1, & n\equiv i \pmod 3), \quad i=0,1,2,\\ 0, & \text{其他}, \quad i=0,1,2.\end{cases} \tag{6}$$

证明 对生成函数 $G(x)$ 作部分分式分解, 得到

$$\begin{aligned}G(x)=&-\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{(cd^3+d^2\alpha)x^2+(d^3-ad\alpha)x+(ac+d)\alpha}{d^3x^3-\alpha}\right]+\\ &\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{(cd^3+d^2\beta)x^2+(d^3-ad\beta)x+(ac+d)\beta}{d^3x^3-\beta}\right].\end{aligned} \tag{7}$$

计算幂级数展开式, $G(x)$ 可化为

$$\begin{aligned}G(x)=&\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{(ac+d)\alpha}{\alpha^{n+1}}x^{3n}+\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{d^3-ad\alpha}{\alpha^{n+1}}x^{3n+1}+\right.\\ &\left.\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{cd^3+d^2\alpha}{\alpha^{n+1}}x^{3n+2}\right]-\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{(ac+d)\beta}{\beta^{n+1}}x^{3n}+\right.\\ &\left.\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{d^3-ad\beta}{\beta^{n+1}}x^{3n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{cd^3+d^2\beta}{\beta^{n+1}}x^{3n+2}\right].\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{(ac+d)\alpha}{\alpha^{n+1}}x^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{(ac+d)\beta}{\beta^{n+1}}x^{3n}\right]\\ =&\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}(ac+d)\frac{\alpha\beta^{n+1}-\beta\alpha^{n+1}}{\alpha^{n+1}\beta^{n+1}}x^{3n}\\ =&\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}(ac+d)\frac{-d^3\beta^n+d^3\alpha^n}{\alpha^{n+1}\beta^{n+1}}x^{3n}\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-d^{3n+3}}{(-d^3)^{n+1}}(ac+d)\frac{\beta^n-\alpha^n}{\alpha-\beta}x^{3n}\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-ac-d)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}x^{3n}.\end{aligned} \tag{9}$$

同理可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{d^3-ad\alpha}{\alpha^{n+1}}x^{3n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{d^3-ad\beta}{\beta^{n+1}}x^{3n+1}\right]\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^n(\alpha+ad)-\beta^n(\beta+ad)}{\alpha-\beta}x^{3n+1},\end{aligned} \tag{10}$$

和

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{cd^3+d^2\alpha}{\alpha^{n+1}}x^{3n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}d^{3n}\frac{cd^3+d^2\beta}{\beta^{n+1}}x^{3n+2}\right]\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^n(c\alpha-d^2)-\beta^n(c\beta-d^2)}{\alpha-\beta}x^{3n+2}.
\end{aligned}\tag{11}
$$

结合 (9)-(11) 式, 得到

$$
\begin{aligned}
G(x)=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}(-ac-d)^{\xi_0(n)}}{\alpha-\beta}\Big[\alpha^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}(\alpha+ad)^{\xi_1(n)}(c\alpha-d^2)^{\xi_2(n)}-\\
&\beta^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}(\beta+ad)^{\xi_1(n)}(c\beta-d^2)^{\xi_2(n)}\Big]x^n\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n.
\end{aligned}
$$

因此得到 (5) 式. 证毕.

用相同的方法, 得到广义三周期 Lucas 序列 $\{v_n\}$ 的通项公式

$$
\begin{aligned}
v_n=&\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}}{\alpha-\beta}\Big[\alpha^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}(2\alpha+abc+bd+2cd)^{\xi_0(n)}(b\alpha-abd-2d^2)^{\xi_1(n)}\times\\
&(bc\alpha+2d\alpha+bd^2)^{\xi_2(n)}-\beta^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}(2\beta+abc+bd+2cd)^{\xi_0(n)}\times\\
&(b\beta-abd-2d^2)^{\xi_1(n)}(bc\beta+2d\beta+bd^2)^{\xi_2(n)}\Big].
\end{aligned}\tag{12}
$$

3 关于广义三周期 Fibonacci 序列的二项式系数和的恒等式

本节中, 要求在序列 $\{u_n\}$ 和序列 $\{v_n\}$ 的定义中 $a=c$, 并且 $a^2+d\neq 0$. 在此前提下, 将得到关于广义三周期 Fibonacci 序列和广义三周期 Lucas 序列的一些二项式系数和的恒等式.

首先注意到此时 $A=a^2b+bd+2ad$.

由 (4) 式 $\alpha+\beta=-A$, 可知 $\alpha-\beta=2\alpha+A,\beta-\alpha=2\beta+A$. 则

$$
\begin{aligned}
v_{3k}=&\frac{(-1)^k}{\alpha-\beta}[\alpha^k(2\alpha+A)-\beta^k(2\beta+A)]\\
=&\frac{(-1)^k}{\alpha-\beta}[\alpha^k(\alpha-\beta)-\beta^k(\beta-\alpha)]=(-1)^k(\alpha^k+\beta^k).
\end{aligned}\tag{13}
$$

引理 3.1　设非负整数 m 和 n 至少有一个被 3 整除, 则有恒等式:

$$u_nv_m+u_mv_n=2u_{n+m},\tag{14}$$

$$u_{n+m}+(-d)^mu_{n-m}=u_nv_m,\tag{15}$$

$$u_{n+m}-(-d)^mu_{n-m}=u_mv_n.\tag{16}$$

证明 仅给出 (16) 式中 $n=3k,\ m\equiv 1\pmod 3$ 的情形, 其他情形方法相似, 在此从略. 当 $n=3k,\ m\equiv 1\pmod 3$ 时,

$$(-d^3)^{\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}=(-d)^{m-1}.$$

由 (13) 式得到

$$\begin{aligned}
u_m v_{3k}&=\frac{(-1)^{m-1}}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right]\cdot(-1)^k(\alpha^k+\beta^k)\\
&=\frac{(-1)^{k+m-1}}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{k+\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{k+\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right]+\\
&\quad\frac{(-1)^{k+m-1}}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}(\alpha+ad)\beta^{\lfloor \frac{m}{3}\rfloor+1}\beta^{k-\lfloor \frac{m}{3}\rfloor-1}-\beta^{\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}(\beta+ad)\alpha^{\lfloor \frac{m}{3}\rfloor+1}\alpha^{k-\lfloor \frac{m}{3}\rfloor-1}\right]\\
&=\frac{(-1)^{k+m-1}}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{k+\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{k+\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right]+\\
&\quad\frac{(-1)^{k}d^{m-1}}{\alpha-\beta}\left[(\alpha+ad)\beta\beta^{k-\lfloor \frac{m}{3}\rfloor-1}-(\beta+ad)\alpha\alpha^{k-\lfloor \frac{m}{3}\rfloor-1}\right]\\
&=\frac{(-1)^{k+m-1}}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{k+\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{k+\lfloor \frac{m}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right]-\\
&\quad\frac{(-1)^{k}d^{m}}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{k-\lfloor \frac{m}{3}\rfloor-1}(a\alpha-d^2)-\beta^{k-\lfloor \frac{m}{3}\rfloor-1}(a\beta-d^2)\right]\\
&=u_{3k+m}-(-d)^m u_{3k-m}.
\end{aligned}$$

证毕.

对于任意正整数 k, 定义 2×2 矩阵

$$\boldsymbol{R}_{3k}=\begin{pmatrix} v_{3k} & 1\\ -(-d)^{3k} & 0\end{pmatrix}. \tag{17}$$

要求 $a^2+d\neq 0$, 确保了 $u_{3k}\neq 0$. 因此有如下引理:

引理 3.2 对于非负整数 n, 有

$$\boldsymbol{R}_{3k}^n=\frac{1}{u_{3k}}\begin{pmatrix} u_{(3n+3)k} & u_{3nk}\\ -(-d)^{3k}u_{3nk} & -(-d)^{3k}u_{(3n-3)k}\end{pmatrix}. \tag{18}$$

证明 使用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 由 (14) 式知, 显然成立. 假设 (18) 式对于任

意正整数 n 成立, 只需证明 (18) 式对于 $n+1$ 成立即可. 由 (15) 式知,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{3k}^{n}\boldsymbol{R}_{3k} &= \frac{1}{u_{3k}}\begin{pmatrix} u_{(3n+3)k} & u_{3nk} \\ -(-d)^{3k}u_{3nk} & -(-d)^{3k}u_{(3n-3)k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{3k} & 1 \\ -(-d)^{3k} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{u_{3k}}\begin{pmatrix} u_{(3n+3)k}v_{3k}-(-d)^{3k}u_{3nk} & u_{(3n+3)k} \\ -(-d)^{3k}u_{3nk}v_{3k}+(-d)^{6k}u_{(3n-3)k} & -(-d)^{3k}u_{3nk} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{u_{3k}}\begin{pmatrix} u_{(3n+6)k} & u_{(3n+3)k} \\ -(-d)^{3k}u_{(3n+3)k} & -(-d)^{3k}u_{3nk} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此 (18) 式对于 $n+1$ 成立, 证毕.

引理 3.3　设 m, n 和 q 为非负整数, 且 m 和 n 被 3 整除. 则

$$u_{n+m}u_{n+q}-u_nu_{n+m+q}=(-d)^nu_mu_q. \tag{19}$$

证明　对于 $n=3k,\ m=3p,\ q\equiv 1 \pmod 3$, 有

$$\begin{aligned}
&u_{3k+3p}u_{3k+q}-u_{3k}u_{3k+3p+q}\\
=&\frac{(-1)^{k+p}(-a^2-d)}{\alpha-\beta}(\alpha^{k+p}-\beta^{k+p})\cdot\frac{(-1)^{k+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{k+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{k+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right]-\\
&\frac{(-1)^{k}(-a^2-d)}{\alpha-\beta}(\alpha^{k}-\beta^{k})\cdot\frac{(-1)^{k+p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{k+p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{k+p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right]\\
=&\frac{(-1)^{2k+p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(-a^2-d)}{(\alpha-\beta)^2}\left\{(\alpha^{k+p}-\beta^{k+p})\left[\alpha^{k+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{k+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right]-\right.\\
&\left.(\alpha^{k}-\beta^{k})\left[\alpha^{k+p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{k+p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right]\right\}\\
=&\frac{(-1)^{p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(-a^2-d)}{(\alpha-\beta)^2}\left[-\alpha^{k+p}\beta^{k+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\beta+ad)-\beta^{k+p}\alpha^{k+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\alpha+ad)+\right.\\
&\left.\alpha^{k}\beta^{k+p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\beta+ad)+\beta^{k}\alpha^{k+p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\alpha+ad)\right]\\
=&\frac{(-1)^{p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(-a^2-d)}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{k}\beta^{k+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\beta+ad)(\beta^p-\alpha^p)+\beta^{k}\alpha^{k+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\alpha+ad)(\alpha^p-\beta^p)\right]\\
=&\frac{(-1)^{p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(-a^2-d)}{(\alpha-\beta)^2}\alpha^k\beta^k(\alpha^p-\beta^p)\left[\alpha^{\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right]\\
=&\frac{(-1)^{p+\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(-a^2-d)}{(\alpha-\beta)^2}(-d)^{3k}(\alpha^p-\beta^p)\left[\alpha^{\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right]\\
=&(-d)^{3k}\frac{(-1)^{p}(-a^2-d)}{\alpha-\beta}(\alpha^p-\beta^p)\frac{(-1)^{\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\alpha+ad)-\beta^{\lfloor\frac{q}{3}\rfloor}(\beta+ad)\right)\\
=&(-d)^{3k}u_{3p}u_q.
\end{aligned}$$

对于 $q \equiv 0 \pmod 3$ 和 $q \equiv 2 \pmod 3$ 的情形, 同理可证.

由引理 3.3, 直接得到

推论 3.1 设 k 为非负整数, 整数 $t \geq 3k$. 则有

$$u_{3k+3nk}u_{3k+t} - u_{3k}u_{3k+3nk+t} = (-d)^{3k}u_{3nk}u_t, \tag{20}$$

$$u_{3k+3nk}u_t - u_{3k}u_{3nk+t} = (-d)^{3k}u_{3nk}u_{t-3k}, \tag{21}$$

$$u_{3nk}u_{3k+t} - u_{3k}u_{3nk+t} = (-d)^{3k}u_{(3n-3)k}u_t. \tag{22}$$

对于整数 $t \geq 3k$, 定义 2×2 矩阵 $\boldsymbol{P}_t$ 为

$$\boldsymbol{P}_t = \begin{pmatrix} u_{3k+t} & u_t \\ -(-d)^{3k}u_t & -(-d)^{3k}u_{t-3k} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

由 (20)-(22) 式以及引理 3.2, 计算得到

$$\boldsymbol{R}_{3k}^n\boldsymbol{P}_t = \frac{1}{u_{3k}}\begin{pmatrix} u_{(3n+3)k} & u_{3nk} \\ -(-d)^{3k}u_{3nk} & -(-d)^{3k}u_{(3n-3)k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{3k+t} & u_t \\ -(-d)^{3k}u_t & -(-d)^{3k}u_{t-3k} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{u_{3k}}\begin{pmatrix} u_{(3n+3)k}u_{3k+t}-(-d)^{3k}u_{3nk}u_t & u_{(3n+3)k}u_t-(-d)^{3k}u_{3nk}u_{t-3k} \\ -(-d)^{3k}u_{3nk}u_{3k+t}+(-d)^{6k}u_{(3n-3)k}u_t & -(-d)^{3k}u_{3nk}u_t+(-d)^{6k}u_{(3n-3)k}u_{t-3k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{3nk+3k+t} & u_{3nk+t} \\ -(-d)^{3k}u_{3nk+t} & -(-d)^{3k}u_{3nk-3k+t} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

由 Cayley-Hamilton 定理知, 矩阵 $\boldsymbol{R}_{3k}$ 的特征方程为

$$\boldsymbol{R}_{3k}^2 - v_{3k}\boldsymbol{R}_{3k} + (-d)^{3k}\boldsymbol{I} = 0,$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为二阶单位矩阵. 因此

$$\left[\boldsymbol{R}_{3k} \pm (-d)^{\frac{3}{2}k}\boldsymbol{I}\right]^2 = \left[v_{3k} \pm 2(-d)^{\frac{3}{2}k}\right]\boldsymbol{R}_{3k}. \tag{25}$$

引理 3.4 对于非负整数 k, 则有

$$v_{6k} + 2(-d)^{3k} = v_{3k}^2, \tag{26}$$

$$v_{6k} - 2(-d)^{3k} = \left(b^2 + \frac{4abd + 4d^2}{a^2 + d}\right)u_{3k}^2. \tag{27}$$

证明　对于 (26) 式, 由 (14) 式可知

$$\begin{aligned} v_{3k}^2 =&(-1)^{2k}(\alpha^k+\beta^k)^2 \\ =&\alpha^{2k}+\beta^{2k}+2\alpha^k\beta^k \\ =&v_{6k}+2(-d)^{3k}. \end{aligned}$$

对于 (27) 式, 得到

$$u_{3k}^2=\frac{(a^2+d)^2}{(\alpha-\beta)^2}(\alpha^k-\beta^k)^2,$$

上式两端乘 $\frac{(\alpha-\beta)^2}{(a^2+d)^2}$, 即得

$$\frac{(\alpha-\beta)^2}{(a^2+d)^2}u_{3k}^2=\alpha^{2k}+\beta^{2k}-2\alpha^k\beta^k=v_{6k}-2(-d)^{3k}. \tag{28}$$

由 (4) 式知,

$$\frac{(\alpha-\beta)^2}{(a^2+d)^2}=\frac{A^2+4d^3}{(a^2+d)^2}=\frac{[b(a^2+d)+2ad]^2+4d^3}{(a^2+d)^2}=b^2+\frac{4abd+4d^2}{a^2+d}. \tag{29}$$

结合 (28)-(29) 式, 即得 (27) 式. 证毕.

定理 3.1　设 m, n 和 k 为非负整数, 则有如下矩阵恒等式:

$$\boldsymbol{R}_{6k}^m[\boldsymbol{R}_{6k}+(-d)^{3k}\boldsymbol{I}]^{2n}=v_{3k}^{2n}\boldsymbol{R}_{6k}^{n+m}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{R}_{6k}^m[\boldsymbol{R}_{6k}+(-d)^{3k}\boldsymbol{I}]^{2n+1}=v_{3k}^{2n}\boldsymbol{R}_{6k}^{n+m}[\boldsymbol{R}_{6k}+(-d)^{3k}\boldsymbol{I}], \tag{31}$$

$$\boldsymbol{R}_{6k}^m[\boldsymbol{R}_{6k}-(-d)^{3k}\boldsymbol{I}]^{2n}=\left(b^2+\frac{4abd+4d^2}{a^2+d}\right)^n u_{3k}^{2n}\boldsymbol{R}_{6k}^{n+m}, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{R}_{6k}^m[\boldsymbol{R}_{6k}-(-d)^{3k}\boldsymbol{I}]^{2n+1}=\left(b^2+\frac{4abd+4d^2}{a^2+d}\right)^n u_{3k}^{2n}\boldsymbol{R}_{6k}^{n+m}[\boldsymbol{R}_{6k}-(-d)^{3k}\boldsymbol{I}]. \tag{33}$$

证明　仅证明 (31) 式. 其他三式方法相似, 在此从略. 由引理 3.4 和 (25) 式, 得到

$$\begin{aligned} &[\boldsymbol{R}_{6k}+(-d)^{3k}\boldsymbol{I}]^2=[v_{6k}+2(-d)^{3k}]\boldsymbol{R}_{6k} \\ \Rightarrow&[\boldsymbol{R}_{6k}+(-d)^{3k}\boldsymbol{I}]^{2n+1}=[v_{6k}+2(-d)^{3k}]^n\boldsymbol{R}_{6k}^n[\boldsymbol{R}_{6k}+(-d)^{3k}\boldsymbol{I}] \\ \Rightarrow&\boldsymbol{R}_{6k}^m[\boldsymbol{R}_{6k}+(-d)^{3k}\boldsymbol{I}]^{2n+1}=[v_{6k}+2(-d)^{3k}]^n\boldsymbol{R}_{6k}^{n+m}[\boldsymbol{R}_{6k}+(-d)^{3k}\boldsymbol{I}] \\ \Rightarrow&\boldsymbol{R}_{6k}^m[\boldsymbol{R}_{6k}+(-d)^{3k}\boldsymbol{I}]^{2n+1}=v_{3k}^{2n}\boldsymbol{R}_{6k}^{n+m}[\boldsymbol{R}_{6k}+(-d)^{3k}\boldsymbol{I}]. \end{aligned}$$

证毕.

设 m 和 n 为非负整数, 且 $n\geq m$. 用 $\binom{n}{m}$ 表示二项式系数. 现在, 经过上面的准备, 可以证明一些关于序列 $\{u_n\}$ 和序列 $\{v_n\}$ 的二项式系数和的恒等式.

定理 3.2 设 m, n 和 k 为非负整数, 整数 $t \geq 3k$. 则下列二项式系数和的恒等式成立:

$$\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} (-d)^{3k(2n-j)} u_{6k(j+m)+t} = v_{3k}^{2n} u_{6k(n+m)+t}, \tag{34}$$

$$\sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} (-d)^{3k(2n+1-j)} u_{6k(j+m)+t} = v_{3k}^{2n+1} u_{6k(n+m)+3k+t}, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} [-(-d)^{3k}]^{(2n-j)} u_{6k(j+m)+t} \\ =& \left(b^2 + \frac{4abd + 4d^2}{a^2 + d}\right)^n u_{3k}^{2n} u_{6k(n+m)+t}, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} [-(-d)^{3k}]^{(2n+1-j)} u_{6k(j+m)+t} \\ =& \left(b^2 + \frac{4abd+4d^2}{a^2 + d}\right)^n u_{3k}^{2n+1} u_{6k(n+m)+3k+t}. \end{aligned} \tag{37}$$

证明 同样仅证明 (35) 式. 对 (31) 式进行二项式展开, 有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{R}_{6k}^{m} [\boldsymbol{R}_{6k} + (-d)^{3k} \boldsymbol{I}]^{2n+1} \\ =& \boldsymbol{R}_{6k}^{m} \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} (-d)^{3k(2n+1-j)} \boldsymbol{R}_{6k}^{j} \\ =& \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} (-d)^{3k(2n+1-j)} \boldsymbol{R}_{6k}^{j+m} \\ =& v_{3k}^{2n} [\boldsymbol{R}_{6k}^{n+m+1} + (-d)^{3k} \boldsymbol{R}_{6k}^{n+m}]. \end{aligned} \tag{38}$$

对 (38) 式最后一个等号两端右乘矩阵 $\boldsymbol{P}_t$, 左右两端所得矩阵右上角元素对应相等, 再结合 (15) 式, 得到

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} (-d)^{3k(2n+1-j)} u_{6k(j+m)+t} \\ =& v_{3k}^{2n} [u_{6k(n+m+1)+t} + (-d)^{3k} u_{6k(n+m)+t}] \\ =& v_{3k}^{2n+1} u_{6k(n+m)+3k+t}. \end{aligned}$$

证毕.

参考文献

[1] Hoggatt E, Bicknell M. A matrix generation of Fibonacci identities for F_{2nk} [J]. Fibonacci Assoc., 1980,1980(1):114-124.

[2] Edson M, Yayenie O. A new generalization of Fibonacci sequences and extended Binet′s formula [J]. Integers, 2009,9(6):639-654.

[3] Leung H H. Some binomial-sum identities for the generalized bi-periodic Fibonacci sequences [J]. J. Notes Number Theory Discrete Math., 2020,26(1):199-208.

[4] Tan E, Ekin B. Some identities on conditional sequences by using matrix method [J]. Miskolc Math. Notes, 2017,18(1):469-477.

[5] Cerda-Morales G. On generalized Fibonacci and Lucas numbers by matrix methods [J]. Hacet. J. Math. Stat., 2013,42(2):173-179.

[6] Edson M, Lewis S, Yayenie O. The k-periodic Fibonacci sequence and an extended Binet′s formula [J]. Integers, 2011,11(6):739-751.

The identities of the sum of binomial coefficients for the generalized 3-periodic Fibonacci sequences

Liu Jingzizhe,　Zhang Wenpeng

(School of Mathematics, Northwest University, Xi′an　710127, China)

Abstract: In this paper, first we construct the general formula of the generalized 3-periodic Fibonacci sequences, then under certain conditions, we give some identities of the sum of binomial coefficients for the generalized 3-periodic Fibonacci sequences and the generalized 3-periodic Lucas sequences by matrix method.

Key words: generalized 3-periodic Fibonacci sequences, matrix method, sum of binomial coefficients

2010 MSC: 11B39