聚焦二项式定理的四类常考问题

浦绍华

（云南省曲靖市会泽县茚旺高级中学）

辩证唯物主义告诉我们，做任何事情都要抓主要矛盾，只有这样才能达到事半功倍的效果，学习二项式定理也是如此.二项式定理虽然有着广泛的应用，但在高考题中只有四类问题时常出现，我们必须牢牢把握.那么究竟是哪四类问题呢？本文对此举例说明.

1　二项展开式特定项的系数问题

特定项系数问题主要包括求展开式中的第 n 项、求展开式中的特定项、已知展开式的某项求特定项的系数等，一般可借助二项式定理的通项公式来求解.

例 1　已知在 $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）的展开式中第 9 项为常数项.求：

（1）n 的值；

（2）展开式中第 7 项的二项式系数及 x^5 的系数；

（3）展开式中的所有有理项.

解析　（1）$\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）的通项公式为 $T_{k+1}=(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\mathrm{C}_n^k x^{2n-\frac{5}{2}k}$.因为第 9 项为常数项，所以当 $k=8$ 时，$2n-\frac{5}{2}k=0$，解得 $n=10$.

（2）由 $T_{k+1}=(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\mathrm{C}_n^k x^{2n-\frac{5}{2}k}$ 可得第 7 项的二项式系数是 $\mathrm{C}_{10}^6=210$.令 $20-\frac{5}{2}k=5$，得 $k=6$，所以展开式中 x^5 的系数为 $(-1)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4\mathrm{C}_{10}^6=\frac{105}{8}$.

（3）由题意得 $20-\frac{5}{2}k$ 为整数，故只需 k 为偶数.因为 $k=0,1,2,3,\cdots,10$，所以符合要求的有 6 项，分别为展开式的第 1 项 $\frac{1}{1\,024}x^{20}$，第 3 项 $\frac{45}{256}x^{15}$，第 5 项 $\frac{105}{32}x^{10}$，第 7 项 $\frac{105}{8}x^5$，第 9 项 $\frac{45}{4}$，第 11 项 x^{-5}.

点评　求二项展开式中特定项，一般采用通项公式法，先写出通项公式，进而转化为方程问题，求出相应的项次，因此要牢记二项展开式中的通项公式.

2　三项式或乘积形式的展开式问题

求解有关三项式或乘积形式的展开式问题，关键是弄清展开式的特征，将问题转化为二项式进行处理，解题时可以利用乘法原理进行求解.

例 2　（1）$\left(1+\frac{y}{x}\right)(x-y)^{10}$ 展开式中 x^2y^8 的系数为________.

（2）$(x+2y+3z)^6$ 展开式中 xy^3z^2 的系数为____.

解析　（1）二项式 $(x-y)^{10}$ 的展开式中含 x^2y^8 的项为 $\mathrm{C}_{10}^8x^2(-y)^8$，含 x^3y^7 的项为 $\mathrm{C}_{10}^7x^3\cdot(-y)^7$，$\left(1+\frac{y}{x}\right)(x-y)^{10}$ 展开式中含 x^2y^8 的项为

$$1\cdot\mathrm{C}_{10}^8x^2(-y)^8+\frac{y}{x}\cdot\mathrm{C}_{10}^7x^3(-y)^7=-75x^2y^8,$$

所以 $\left(1+\frac{y}{x}\right)(x-y)^{10}$ 展开式中 x^2y^8 的系数为 -75.

（2）因为 $(x+2y+3z)^6=[(x+2y)+3z]^6$，设其展开式的通项公式为

$T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(x+2y)^{6-r}\cdot3^r\cdot z^r(r=0,1,2,\cdots,6)$，

令 $r=2$，得 $(x+2y)^4$ 的通项公式为

$\mathrm{C}_4^m x^{4-m}\cdot(2y)^m=\mathrm{C}_4^m\cdot2^m x^{4-m}\cdot y^m(m=0,1,2,3,4)$，

令 $4-m=1$，得 $m=3$，所以 $(x+2y+3z)^6$ 的展开式中 xy^3z^2 的系数为 $\mathrm{C}_6^2\times3^2\times\mathrm{C}_4^3\times2^3=4\,320$.

点评　求多项式乘积中特定项或它的系数，一般利用两个多项式相乘的运算法则并通过分类讨论解决；三项式问题的解决一般有两条途径：一是将其转化为二项式问题，如本例第(2)问的解法；二是利用乘法原理，如本例第(2)问要求含有 xy^3z^2 的项，可以认为在 6 个 $(x+2y+3z)$ 式子中 x,y,z 分别取 1 次，3 次和 2 次，所以有 $\mathrm{C}_6^1x\mathrm{C}_5^3(2y)^3\mathrm{C}_2^2(3z)^2=\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_2^2\times2^3\times3^2\times xy^3z^2=4\,320xy^3z^2$.

3　二项式系数的性质问题

抓住二项式系数的性质是解题的关键，解题时需

注意区分二项式系数与展开式中项的系数，在 $T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r$ 中，C_n^r 是该项的二项式系数，与该项的（字母）系数是两个不同的概念，前者只指 C_n^r，而后者是字母外的部分，前者只与 n 和 r 有关，恒为正，后者还与 a,b 有关，可正可负，同时，要牢记通项公式 $T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r$ 是展开式的第 $r+1$ 项，不是第 r 项.

例3 已知 $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中，前三项的系数成等差数列.

(1) 求展开式中二项式系数最大的项；

(2) 求展开式中系数最大的项.

解析 (1) $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 的通项公式为

$$T_{r+1}=C_n^r(\sqrt[3]{x})^{n-r}(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^r=C_n^r(\frac{1}{2})^r x^{\frac{n-2r}{3}}.$$

因为展开式中前三项的系数成等差数列，所以 $2C_n^1\cdot\frac{1}{2}=C_n^0+C_n^2\cdot\frac{1}{4}$，即 $n^2-9n+8=0$，解得 $n=8$ 或 1（舍），则第5项的二项式系数最大，所以二项式系数最大的项为 $T_5=C_8^4(\frac{1}{2})^4x^{\frac{8-8}{3}}=\frac{35}{8}$.

(2)由(1)得展开式中系数为 $C_8^r(\frac{1}{2})^r$.由

$$\begin{cases}C_8^r(\frac{1}{2})^r\geqslant C_8^{r+1}(\frac{1}{2})^{r+1},\\ C_8^r(\frac{1}{2})^r\geqslant C_8^{r-1}(\frac{1}{2})^{r-1},\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\frac{2\times 8!}{r!\,(8-r)!}\geqslant\frac{8!}{(r+1)!\,(7-r)!},\\ \frac{8!}{r!\,(8-r)!}\geqslant\frac{2\times 8!}{(r-1)!\,(9-r)!},\end{cases}$$

整理得 $\begin{cases}2r+2\geqslant 8-r,\\ 9-r\geqslant 2r,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant r\leqslant 3$，所以当 $r=2$ 或 3 时项的系数最大.因此，展开式中系数最大的项为 $T_3=C_8^2(\frac{1}{2})^2x^{\frac{4}{3}}=7x^{\frac{4}{3}}$ 和 $T_4=C_8^3(\frac{1}{2})^3x^{\frac{2}{3}}=7x^{\frac{2}{3}}$.

点评 二项式系数与项的系数是两个不同的概念.二项式系数最大的项就是二项展开式中的中间项；求 $(a+bx)^n$ 展开式中最大的项，一般采用待定系数法.

4 二项式系数之和问题

求解二项式系数之和问题一般都采用赋值法.它主要有以下两种情形：1)二项式定理给出的是一个恒等式，对于 a,b 的一切值都成立.因此，可将 a,b 设定为一些特殊的值.在使用赋值法，令 a,b 等于多少时，应视具体情况而定，一般取“1，-1 或 0”；2)一般地，若 $f(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则 $f(x)$ 的展开式中各项系数之和为 $f(1)$，奇数项系数之和为 $a_0+a_2+a_4+\cdots=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$，偶数项系数之和为 $a_1+a_3+a_5+\cdots=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$.

例4 设 $(2-\sqrt{3}x)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{100}x^{100}$，求下列各式的值.

(1) a_0；

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$；

(3) $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$；

(4) $(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})^2-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})^2$.

解析 (1)在 $(2-\sqrt{3}x)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{100}x^{100}$ 中，令 $x=0$，得 $a_0=2^{100}$.

(2)令 $x=1$，得

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{100}=(2-\sqrt{3})^{100},\quad ①$$

则 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=(2-\sqrt{3})^{100}-2^{100}$.

(3)令 $x=-1$，得

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{99}+a_{100}=(2+\sqrt{3})^{100},\quad ②$$

①－②得

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=\frac{(2-\sqrt{3})^{100}-(2+\sqrt{3})^{100}}{2}.$$

(4)

$$\begin{aligned}&(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})^2-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})^2=\\&(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{100})\cdot(a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{99}+a_{100})=\\&(2-\sqrt{3})^{100}(2+\sqrt{3})^{100}=[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^{100}=1.\end{aligned}$$

点评 赋值法是求解二项式系数和问题的基本的方法，是常用的特殊化思想.如何赋值，需根据实际情况而定，如本题中要求常数项，应赋 x 为 0；求所有项系数之和，应赋 x 为 1；要求奇次项系数和或偶次项系数和，还需赋 x 为 -1，再通过联立方程组求得.

通过分析不难发现，求解二项式定理的应用问题，主要有三种方法：一是通项法，利用通项将所求问题转化为方程问题；二是转化法，将非二项式问题转化为二项式问题；三是赋值法，将一般问题特殊化.

（完）