

整体观念和深度学习视角下两个计数原理的教学

徐道奎

(安徽省金寨第一中学 六安市徐道奎名师工作室:237300)

摘 要:两个计数原理是整个计数问题的基础,要充分认识原理的地位和作用,发挥其教育价值,要在整体观念和深度学习视角下,不断渗透运用原理的思想方法,积累原理运用思维经验,促进学生深度学习。

关键词:两个计数原理;地位作用;原理教学;原理运用

人类文明是从计数开始的,计数早于文字的产生,伴随着人类文明发展。^[1]计数是人们认识客观世界的基础,两个计数原理是人们在认识客观世界过程中对事物规律的抽象概括,是概率统计的基础。

两个计数原理(以下简称“两个原理”)不只是计数规律的简单概括,更反映了处理计数问题的一般思想和思维方法,通过两个原理的教学,能够很好地培养学生思考问题的能力,发展学生的数学建模、数学抽象和逻辑推理素养。人教版新教材A版将其安排在选择性必修三,对应的教学用书对该部分教学给出了很好的建议,笔者认真通读了教材和教学用书,结合自己的教学实践,谈一点体会。

一、对两个原理地位与作用的认识

两个原理又称计数的“基本原理”,为什么称之为基本原理?其基本性、基础性表现在什么地方?怎样发挥基本原理的教育价值?这是基本原理教学时必须正视的问题。

第一,在计数问题中具有基础性。两个原理的抽象过程显而易见,无需复杂的推理和证明。两个原理是计数的最基本的规律,是解决计数问题的基础,其计数方法是最基础的,基本结论是最基础的,同时,其基本计数规律也是进一步学习其它与计数有关知识(如排列组合和二项式定理)的基础。

第二,在计数运用中具有独立性。两个原理体现了计数问题“最本质、最直接”的思维特点,其思考方式独特。没有形成两个原理之前的计数,实际上一直在不知不觉地运用,只不过没有抽象为一般原理。两个原理不需要与任何定理、规则联系即可运用,找到问题解决的分类与分步方法才容易计数。

第三,在思维培养上体现基本性。两个原理是计数的规律、结论、公式、方法的统一。基本原理的教学

不仅仅让学生掌握计数的原理和结论,更重要的是让学生掌握解决问题的思维方法,即如何思考计数问题和如何计数。不是所有的计数都要用两个原理的公式和结论,但以分类和分步解决计数问题的思维方法是确定的。

第四,在思想方法形成上具有基础性。两个原理是解决计数问题的基本思想方法,分类分步计数既是方法,也是思想。两个原理的教育功能体现在原理形成和运用过程中问题解决的数学思想的内化。方法反映了原理,原理渗透着思想。分类、分步反映了解决计数问题的思路和条理,通过教学,要让学生理解分类与分步之于计数的重要性,解决计数问题的思想方法对解决其他数学问题的思想方法有着巨大影响,体现其基础性。

正因如此,两个原理的教学要更具前瞻性,把分类分步这个基本思想的渗透贯穿于整个计数过程,把分类分步这个基本方法的运用贯穿于整个计数过程,把后续内容如排列组合等定理公式视为建立在两个原理之上的数学规律。无论是在具体运用还是在思想方法和思维方法上,两个原理都具有重要的地位,教学时要充分挖掘其教育功能,规划好、设计好、安排好教学,要基于整体观念和深度学习视角深刻认识两个原理的教学意义。

二、计数原理教学存在的问题及思考

教学实践中往往存在两个问题:一是强调两个原理形成过程而疏于应用,没有把两个原理教学放在单元和整体视域下通盘考虑;二是在两个原理形成和运用过程中缺乏基本思想的引领和渗透,局限于应付各种题型和范式,尤其是人们对计数问题解决的思想方法重要性的认识止于理论层面,没有把运用原理的思维和活动经验的积累放在应有的位置,没有重视问题解决在两个原理教学中的重要作

用,把两个原理同之后的排列组合、二项式定理孤立开来,没有把两个原理中思维方法与培养学生的数学思维方法、思维能力联系在一起.因此,有必要对两个原理的教学重新认识,重新定位.

第一,两个原理形成过程中要充分凸显分类、分步思考问题的数学思想.在抽象原理时,要引导学生思维,寻找完成“任务”的逻辑起点(分类或分步),引导学生有思想、有方法、有规律的“完成”“一件事情”.

第二,要引导学生比较分类分步的区别,理解分类、分步结果中相加、相乘的来龙去脉和基本算理.

第三,运用两个原理时,要引导学生理解分类或分步是解决计数问题的基础,是标准,是顺序,是路径,不分类不分步,问题就混沌混乱,缺乏章法,解决不了.分类后,某一类中很可能还要分类或分步;分步后,某一步还要分步或分类,体悟分类分步的相互交叉和相互嵌套.

如上分析,两个原理的教学,要突出其形成过程,突出思维及思想方法,要结合实际,体验分类、分步计数的特点.笔者认为,两个原理的教学不能走向两个“极端”,即:既不能不渗透思想方法,不理解思维过程的结论套用,也不能就原理讲原理,不接触实际地空谈.

三、两个原理形成过程的教学

1. 情境设置 —— 凸显两个原理的思想方法,突出分类分步在计数中的作用

设置两个原理形成的问题情境,要自始至终围绕如何分类分步完成事情(任务),要能体现依靠分类、分步才能完成事情(任务)的思想方法.(1)不要过于单一,要体现分类分步的价值,如果情境过于简单,结果一目了然,学生会认为分类、分步是多余的.情境可以由易到“繁”,逐步加大情境中计数的难度.(2)不宜过于复杂,在两个原理形成过程中,要使学生的注意力始终集中在如何通过分类或分步去解决问题上,不要纠缠于影响分类分步的其它“枝节”.(3)要不断地变化情境,从两类、两步到两类、两步以上归纳得出 n 类或 n 步计数原理.

我们以人教 A 版教材例题设置的问题情境为蓝本,把分类和分步的问题情境进行引申,加大思维含量,强化学生计数的分类、分步意识.

【引申 1】意图:凸显分类的作用.

在例 1 的基础上,增加 C 大学及其相关专业,如下表.

A 大学	B 大学	C 大学
生物学	数学	数学
化学	会计学	土木建筑学
医学	信息技术学	建筑设计学
物理学	法学	车辆工程学
工程学		

(1) 若该同学尚有两个专业未选择,他想把 C 大学的某一个专业做为“保底专业”放在最后填报,另一个专业从 A 大学或 B 大学选择,且所选的专业不重复,问他有多少种选择方式?(按照所选 C 大学的专业进行分类,从选择的专业角度分析,A 大学 B 大学可以视为一个整体考虑)

(2) 如果该同学从“医学”“化学”“会计学”“数学”专业中选择一个作为首选专业,然后再另选一个专业,且专业和学校均不重复,他有多少种选择方式?(加大分类的种数和考虑问题的难度)

【引申 2】意图:凸显分步的意义.

如上表,(1) 若该同学想在三个学校各选一个专业(专业可以重复),有多少种选择方法?

(2) 若该同学想在三个学校各选一个专业(专业不可以重复),有多少种选择方法?

(分类中有分步或分步中有分类)

通过加大情境中问题的难度,显现分类分步的解题原理,渗透分类分步的解题思想.

2. 对比分析 —— 注重分类分步的比较融合,突出两个原理的意义和区别

分类、分步原理的教学宜同步进行,在对比和比较中建立概念,分析概念之间的差异.分类与分步的最大不同是,分类中的“每一类”都能把事情(任务)完成,而分步中,必须每一步都完成,事情(任务)才能完成.再运用上述问题情境,比较分类、分步的区别,强调分类、分步的意义.

	分类计数	分步计数
区别 1	完成一件事,共有 n 类办法,关键在“分类”	完成一件事,共有 n 个步骤,关键在“分步”
区别 2	每类办法都能独立地完成这件事	只有各个步骤一环扣一环地都完成了,才能完成这件事
区别 3	各类办法之间是互斥的、独立的、并列的	各个步骤之间是关联的、相互制约的

在对比的基础上,借助于图示,直观分析计数结果的规律,让学生理解加法和乘法算理。

四、两个原理的运用教学

学习两个原理时,学生往往反映,计数问题讲起来容易,做起来困难.怎样运用两个原理解决问题?怎样对问题的背景及情境进行分析,怎样将问题“转化和对应到相应的原理上”^[2],必须结合具体问题分析.两个原理不是“难”在对原理本身的理解,而是“难”在原理的运用。

(1) 对“完成一件事情”的理解,什么是完成一件事情(任务),怎样完成一件事情(任务)?

(2) 完成事情(任务)不是杂乱无章地进行,要理出条理、类别、步骤,也就是要确定分类标准、分步的顺序.第一,不要急于归纳计数的结果(排列数和组合数),而应一步一步地引导思考,突出对计数过程中分类或分步的分析.第二,不要把所有计数应用问题都放在排列组合学习后,要尽可能地突出分类或分步在实际计数中的作用。

1. 问题导向——领悟计数问题的思考方法

(1) 我们需要完成什么事情?

(2) 怎样完成这件事情?

(3) 这件事情可以分几类情况完成?

(4) 完成这件事情需要分哪几个步骤以次进行?

(5) 完成这件事情时,思考问题的主线索是分类还是分步?

思考问题的主线索很关键,“按照什么路径去完成任务”去“完成一件事情”,这个“路径”就是完成事情的主线索。

上述问题就是我们解决计数问题时必须思考的,要使学生明白,当你计数遇到困难时,要潜意识地思考、回答这些问题,以问题引领分析,问题促进思维。

2. 明晰概念——以分类分步理出问题解决的条理

计数问题是很难的,问题解决的关键是理出思考问题的条理,考虑问题的角度,找到分类分步解决问题的方法.因此,要深入理解分类分步的意义。

要确定完成事情的一个分类“标准”,或完成事情的一个顺序,按照“标准”分类,按照“顺序”分步,思考问题的“角度”很重要。

(1) 分类的标准是对分类的基本要求,标准不同,分类的结果也不同,要通过具体问题探究分类标准,尝试怎样分类易于解决问题.要把握分类的含

义,类与类必须是互斥的,没有交叉和重叠,完成一件事情的任何一种方法只能属于某一类。

(2) 分步是指完成任务的先后顺序,第一步干什么,第二步干什么,连续完成所有的步骤,事情才能做完,步与步是独立的.如何安排完成一件事情的步骤呢?要结合事情的特点,确立一个分步的程序,而选择的这个程序能够保证步骤完整,能够完成任务。

确立分类或分步是计数问题的难点.如何突破难点?要从计数原理形成开始,渗透分析问题的分类分步方法,把握思考计数问题的基本思想,回答上述问题导向中提出的问题,确立思考和解决问题的路径。

3. 积累经验——掌握分类分步的方法

如前所述,两个原理是整个计数问题的基础,之后的内容是两个基本原理的具体应用,实际上,我们无需学习排列组合,直接用两个原理完全可以解决计数问题,因此,很多计数的应用可以提前介入,这样,既深度学习和巩固了两个原理,体现了两个原理在整个计数问题中的作用,又为后续学习打下基础。

两个原理的教学,最终要落实到寻找分类分步完成事情(任务)的方法上。

3.1 改变背景情境中问题的描述方式,寻找分类分步的方法

通过分析,对问题进行转化,使问题解决易于分类或分步,具有可操作性。

(注:以下例题部分来自文[3]中例题的改编)

例1 630有多少个不同的正约数?

分析 因为 $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$, 所以630的约数形式为: $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$, 其中, $\alpha = 0, 1, \beta = 0, 1, 2, \gamma = 0, 1, \delta = 0, 1$. 由分步计数原理,共有 $2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$ 个。

3.2 顺着“事情(任务)”的完成过程,寻找分类分步的方法

例2 从0~9这十个数字中,每次任选5个,可以组成多少个分别符合下列条件的没有重复数字的五位数?

(1) 奇数;

(2) 能被25整除;

(3) 50000~90000之间的偶数。

注:该问题原本安排在学习完排列组合之后,我们可以把它放在基本原理学习之后完成,目的在于彰显分类分步计数运用的独立性。

分析 组建一个数,就要根据问题的限制条

件,看如何组建,有哪些类型,每一种类型按照什么步骤组建.

(1) 因为个位数是奇数,首位不能为零,我们按照限制条件多的数位优先安排,放在第一步,因此,第一步组建个位,第二步组建首位,第三步,组建中间的 3 位. 根据分步计数原理,共有 $5 \times 8 \times 8 \times 7 \times 6 = 13440$ 个.

(2) 能被 25 整除的数,最后两位数只能为 25, 50, 75, 有三种可能,所以先分类,然后每一类再分步完成. 最后两位数是 25 的,有 $7 \times 7 \times 6 = 294$ 个;最后两位数是 50 的,有 $8 \times 7 \times 6 = 336$ 个;最后两位数是 75 的,有 $7 \times 7 \times 6 = 294$ 个. 所以,根据分类计数原理,共有 $294 + 336 + 294 = 924$ 个.

(3) 首位、末位都有限制,首位数只能是 5, 6, 7, 8, 个位数只能是 0, 2, 4, 6, 8, 我们确立一个“完成任务”的主线,按照首位数分类.

第一类,首位数是 5 或 7 时,共有 $2 \times 5 \times 8 \times 7 \times 6 = 3360$ 种方法;

第二类,首位数是 6 或 8 时,共有 $2 \times 4 \times 8 \times 7 \times 6 = 2688$ 种方法.

所以,根据分类计数原理,共有 $3360 + 2688 = 6048$ 个.

通过解决上述问题,让学生领悟计数问题的本质,理解计数问题是求完成一件事情(任务)有多少种方法,这个事情(任务)不是杂乱无章地去做,而是按照一定线索、路径去实现,怎么完成,有几种途径,几个步骤等等,这就是寻找问题解决的分类或分步方法. 因此,如何完成一件事情(任务)是需要首先考虑的. 如组合一个五位数,我们就应该想如何把这个数字组合出来,个位是什么,首位是什么?按照什么线索和路径把数“组排”出来. 事实上,知道如何完成一件事情,分类分步也就自然明了.

完成一件事情(任务)往往有许多限制条件,以其中的一个限制条件为主线就是选择分类的标准,由这个限制条件,派生出的各种情况就是具体分类的个数,如果事情需要一步一步完成,这就是分步的意义. 要根据具体情境确定完成任务时是分类在先还是分步在先.

3.3 改变问题的思考角度,寻找分类分步方法

如果分类时种类繁多,可以从反面着手分析.

例 3 有多少个能被 3 整除而又含有数字 6 的五位数?

分析 条件“能被 3 整除”容易把握,而“含有

数字 6”情况较为复杂,注意到本题数位上的数字可以重复,数字 6 可以出现在各个数位上,正面考虑,分类较多,我们采用“正难则反”的方法,先考虑“能被 3 整除而又不含数字 6”的五位数字个数,再从“能被 3 整除的五位数”总数中减去.

易知,五位数中,能被 3 整除的数有 30000 个. 现在我们求不含数字 6 的情形.

① 最高位不能为 0 和 6,有 8 种可能;

② 中间的 3 位数字不能为 6,各有 9 种可能;

③ 个位数是关键,既不能是 6,还要保证整个数能被 3 整除. 这个时候又要分类:当前四位数字之和被 3 除余 1 时,个位可以为 2, 5, 8;当前四位数字之和被 3 除余 2 时,个位可以为 1, 4, 7;当前四位数字之和能被 3 整除时,个位可以为 0, 3, 9. 因此,不论前四位数字之和是什么情况,个位均有 3 种可能.

所以,能被 3 整除且不含数字 6 的有 $8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 3 = 17496$ 种可能.

所以,被 3 整除而又含有数字 6 的五位数有 $30000 - 17496 = 12504$ 个.

具体分类分步时,要引导学生思考分类、分步是否正确,是否科学,是否做到类类互斥,步步独立,不重不漏.

3.4 结合几何直观,寻找分类分步的方法

例 4 (文[3]中例题改编) 有如图 1 所示的一个花坛,分为五个区域,现把其栽上花苗,有五种不同颜色的花苗可供选择,要求相邻两块的花苗不同色,问总共有多少种不同的方法?

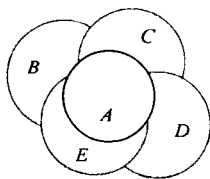


图 1

解法一 有五块区域,首先考虑分步. 实施分步的过程中发现需要分类.

因为区域 A 与所有其它区域相邻,最先把 A 的花苗选好,按照 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ 的顺序选择花苗的颜色. A 有 5 种选择方法, B 有 4 种选择方法, C 有 3 种选择方法, D 有 3 种选择方法,但是,区域 E 在选择花苗时,需要对 B, D 选色的情况进行分类.

(1) 若 B, D 同色,根据分步计数原理,有 $5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 = 180$ 种方法;

(2) 若 B, D 不同色,则根据分步计数原理,有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$ 种方法.

根据分类计数原理,共有 $180 + 240 = 420$ 种方法.

解法二 根据总体选色的多少分类,每一类选色后分步.

五种颜色的花苗不一定全部用上,根据需要花苗的种类考虑分类.显然,要使相邻区域不同色,至少需要三种颜色.因此,选择花苗可以分成三类.

(1) 若选五种颜色花苗,则有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 种方法;

(2) 若选四种颜色花苗,必有两块区域同色,只有 B 、 D 同色或 C 、 E 同色,另外,选四种颜色本身就有 5 种方法,所以有 $2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 240$ 种方法;

(3) 若选三种颜色花苗,由图可知,只有 B 、 D 同色且 C 、 E 同色,另外,选三种颜色本身有 10 种方法,所以有 $10 \times 3 \times 2 \times 1 = 60$ 种方法.

所以,根据分类计数原理,共有 $120 + 240 + 60 = 420$ 种方法.

在引导分析时,要强调:(1) 如何切入问题(怎样选择区域花苗颜色);(2) 按照什么方法(什么标准,什么步骤选择颜色)计数.要引导学生深入情境,“设身处地”“身临其境”,假如要我选择区域颜色,我怎么选?按什么步骤或什么标准?完成任务的主线是什么?

(1) 以分类为主线还是分步为主线,要看你思考问题的角度.即:分类、分步主线的确定不是一成不变的,同样一个问题,可以以分类为主线分析,也可以以分步为主线分析.分类分步也不是单纯的或单一的,往往分类中有分步,分步中有分类,分类分步是综合、交叉的.

(2) 实际计数时,并不是一开始就能把所有“标准”或“顺序”都搞得清清楚楚明明白白,有时是在

分步的过程中发现需要分类,在分类计数时发现需要分步,也就是主线(主干)下有枝节.

计数问题常常涉及一些复杂的关系,很容易造成分析过程的思维混乱、逻辑混乱,要在具体问题解决中理解切入问题的方法,要让学生意识到,只有分类或分步才容易切入问题,找到解决问题的办法,不断强化计数问题的分类和分步意识.

五、结束语

凸显两个原理的思想方法,积累两个原理应用的思维和活动经验,培养学生学会依据原理思考问题的方法,把计数问题“科学的思考方法化为学生惯常的思维方式”^[4].要厚实基础,特别要强化两个原理的运用教学,使之与后续计数有关的教学水到渠成,这不仅对原理的掌握,而且对计数的数学思想形成都是十分有益的.

在实施基本原理的教学时,要有意识地放慢教学节奏,两个计数原理的思想、思维、方法及运用是贯穿计数问题始终的,不要怕在这里多花时间.

参考文献:

- [1] 陈光立. 新课标高中教师手册 数学[M]. 南京: 南京大学出版社, 2012: 210.
- [2] 王嵘. 从两个原理出,提升数学抽象素养和逻辑推理素养[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2021(5): 11-14.
- [3] 马传渔. 中国华罗庚学校数学课本(高二年级)[M]. 吉林: 吉林教育出版社, 2019: 179-183.
- [4] 徐章韬. 指向深度学习: 根植学科的数学学习理论[J]. 教育理论研究, 2017(8).

(收稿日期: 2022-05-29)

(上接第 11 页)

- [6] 单尊. 数学课应当讲数学[J]. 中学数学研究, 2006(11): 30-31.
- [7] 严士健. 普通高中课程标准实验教科书数学(必修 1)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2004: 61.

- [8] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 80.
- [9] 李伟. 别被理念绑架教学[J]. 数学通报, 2019(2): 18-20, 25.

(收稿日期: 2022-05-21)