江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

第二章　第 5 讲　函数性质的综合问题

研制人：张顺军　　审核人：鲁媛媛

班级：__________　姓名：________________　学号：______________　授课日期：2022.5.24

【本课在课程标准中的表述】

①进一步理解函数的四大性质的内涵，能根据函数解析式、定义、图像发现函数的相关性质；

②理解函数的不同性质之间的相互关联，能根据相关定义推导函数的相关性质，并根据相关性质解决具体问题。

【课前热身】

1. 已知函数 $f(x)$满足以下两个条件：①任意 x_1，$x_2\in(0，+\infty)$且 $x_1\neq x_2$，$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$；②对定义域内任意 x 有 $f(x)+f(-x)=0$，则符合条件的函数是(　　)

A．$f(x)=2x$　　B．$f(x)=1-|x|$　　C．$f(x)=-x^3$　　D．$f(x)=\ln(x^2+3)$

答案　C 解析　由①知 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，由②知 $f(x)$为奇函数．

2. 已知 $f(x)$的定义域为 **R**，其函数图象关于直线 $x=-1$ 对称，且 $f(x+4)=f(x-2)$．若当 $x\in[-4，-1]$时，$f(x)=6^{-x}$，则 $f(919)=$(　　)

A．$-\dfrac{1}{216}$　　B．$\dfrac{1}{216}$　　C．-216　　D．216

答案　D 解析　由 $f(x+4)=f(x-2)$，得 $f(x+6)=f(x)$．故 $f(x)$是周期为 6 的函数．

所以 $f(919)=f(6\times153+1)=f(1)$．因为 $f(x)$的图象关于直线 $x=-1$ 对称，所以 $f(1)=f(-3)$．

又 $x\in[-4，-1]$时，$f(x)=6^{-x}$，所以 $f(-3)=6^{-(-3)}=216$.

从而 $f(1)=216$，故 $f(919)=216$.

3. 已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，$f(x+1)$是偶函数，当 $x\in(2,4)$时，$f(x)=|x-3|$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(2\,020)=$(　　).

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

答案　A 解析　因为 $f(x)$为奇函数，$f(x+1)$为偶函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)=-f(x-1)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$的周期为 4，所以 $f(4)=f(0)=0$，$f(3)=f(-1)=-f(1)$．在 $f(x+1)=f(-x+1)$中，令 $x=1$，可得 $f(2)=f(0)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$.

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(2\,020)=505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=0$. 选 A

4. (多选)函数 $f(x)$满足 $f(x-1)$为奇函数，$f(x+1)$为偶函数，则下列说法正确的是（　　）

A.$f(x)$的周期为 8；B.$f(x)$关于点$(-1,0)$对称；C.$f(x)$为偶函数；D.$f(x+7)$为奇函数．

答案　ABD 解析　∵$f(x-1)$为奇函数，∴$f(x-1)$的图象关于$(0,0)$对称，∴$f(x)$的图象关于点$(-1,0)$对称，

又 $f(x+1)$为偶函数，∴$f(x+1)$的图象关于直线 $x=0$ 对称，

∴$f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，∴$f(x)$的图象关于点$(-1,0)$和直线 $x=1$ 对称，

∴$f(x)$的周期为 8，∴AB 正确，C 不正确．∵$T=8$，∴$f(x+7)=f(x-1)$，

又 $f(x-1)$为奇函数，∴$f(x+7)$为奇函数，故 D 正确．

5. 已知 $f(x)$是 **R** 上的奇函数，且 $f(x+2)=f(x)$，则 $f(2\ 020)+f(2\ 021)=$________.

答案　0 解析　依题意 $f(x)$为奇函数，且周期为 2，∴$f(2\ 020)+f(2\ 021)=f(0)+f(1)$，

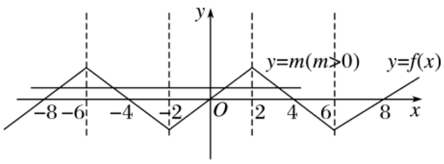
∵$f(x)$为奇函数，$f(0)=0$，且 $f(-1)=-f(1)$，①

又周期为 2，∴$f(-1)=f(1)$，②

由①②解得 $f(1)=f(-1)=0$，∴$f(2\ 020)+f(2\ 021)=0$.

6. 已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x-4)=-f(x)$，且在区间[0,2]上单调递增．若方程 $f(x)=m(m>0)$在区间[－8,8]上有四个不同的根 x_1，x_2，x_3，x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$________.

答案　－8 解析　因为定义在 **R** 上的奇函数满足 $f(x-4)=-f(x)$，所以 $f(x-4)=f(-x)$．由 $f(x)$为奇函数，所以函数图象关于直线 $x=2$ 对称，且 $f(0)=0$.由 $f(x-4)=-f(x)$知 $f(x-8)=f(x)$，所以函数的周期为 8.又因为 $f(x)$在区间[0,2]上单调递增，所以函数在区间[－2,0]上也单调递增，作出函数 $f(x)$的大致图象如图所示，那么方程 $f(x)=m(m>0)$在区间[－8,8]上有四个不同的根 x_1，x_2，x_3，x_4，不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4$，由对称性可知 $x_1+x_2=-12$，$x_3+x_4=4$，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=-8$.



【知识梳理】

【典例探究】

考点一　函数的单调性与奇偶性

例 1. （1）若定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是(　　)

A．[－1,1]∪[3，＋∞)　　B．[－3，－1]∪[0,1]　　C．[－1,0]∪[1，＋∞)　　D．[－1,0]∪[1,3]

(2)已知偶函数 $f(x)$在区间[0，＋∞)上单调递增，则满足 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$的 x 的取值范围是________．

答案　（1）D　(2)$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

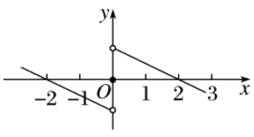
解析　（1）因为函数 $f(x)$为定义在 **R** 上的奇函数，

则 $f(0)=0$.

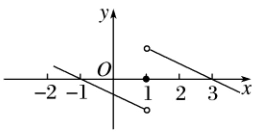
又 $f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，且 $f(2)=0$，

画出函数 $f(x)$的大致图象如图(1)所示，

则函数 $f(x-1)$的大致图象如图(2)所示．



(1)



(2)

当 $x\leqslant 0$ 时，要满足 $xf(x-1)\geqslant 0$，则 $f(x-1)\leqslant 0$，

得 $-1\leqslant x\leqslant 0$.

当 $x>0$ 时，要满足 $xf(x-1)\geqslant 0$，则 $f(x-1)\geqslant 0$，

得 $1\leqslant x\leqslant 3$.

故满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是$[-1,0]\cup[1,3]$.

(2)依题意有 $f(x)$在$[0，+\infty)$上单调递增，在$(-\infty，0]$上单调递减，$\therefore |2x-1|<\frac{1}{3}$,

即$-\frac{1}{3}<2x-1<\frac{1}{3}$，解得$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$.

考点二 函数的奇偶性与周期性

例 2. (1)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^2$，则 $f(2\,023)$等于(　　)

A．$2\,019^2$　　　　B．1　　　　C．0　　　　D．-1

(2)已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 3 为周期的偶函数，若 $f(1)<1$，$f(5)=2a-3$，则实数 a 的取值范围是

________．

答案　(1)D　(2) $(-\infty，2)$

解析　(1)根据题意，函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$，则有 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即函数是周期为 4 的周期函数，则 $f(2\ 023)=f(-1+2\ 024)=f(-1)$，又函数 $y=f(x)$为奇函数，且 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x^2$，则 $f(-1)=-f(1)=-1$，故 $f(2\,023)=-1$.

(2)$\because f(x)$为偶函数，且周期为 3，$\therefore f(5)=f(5-6)=f(-1)=f(1)$，$\because f(1)<1$，$\therefore f(5)=2a-3<1$，即 $a<2$.

考点三 函数的奇偶性与对称性

例 3. (1)已知函数 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且满足 $f(4-x)=-f(x)$，则 $f(x)$的周期为(　　)

A．-4　B．2　C．4　D．6

(2)函数 $y=f(x)$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+2)=f(-x)$成立，且函数 $y=f(x-1)$的图象关于点$(1,0)$对称，$f(1)=4$，则 $f(2\,020)+f(2\,021)+f(2\,022)$的值为________．

答案　(1)C　　(2)4

解析　(1)$\because f(4-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称，$\therefore f(-x)=-f(x+4)$，

又$\because f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x+4)=f(x)$．$\therefore T=4$.

(2)因为函数 $y=f(x-1)$的图象关于点$(1,0)$对称，

所以函数 $y=f(x)$的图象关于原点对称，即函数 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故 $f(x)$的周期为 4.

所以 $f(2\,021)=f(505\times4+1)=f(1)=4$，所以 $f(2\,020)+f(2\,022)=f(2\,020)+f(2\,020+2)$

$=f(2\,020)+f(-2\,020)=f(2\,020)-f(2\,020)=0$，所以 $f(2\,020)+f(2\,021)+f(2\,022)=4$.

考点四 函数的周期性与对称性

例 4. (多选)已知 $f(x)$的定义域为 **R**，其函数图象关于直线 $x=-3$ 对称，且 $f(x+3)=f(x-3)$，若当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)=4^x+2x-11$，则下列结论正确的是(　　)

A．$f(x)$为偶函数　　B．$f(x)$在$[-6,-3]$上单调递减　　C．$f(x)$关于 $x=3$ 对称　　D．$f(100)=9$

答案　ACD

解析　$f(x)$的图象关于 $x=-3$ 对称，则 $f(-x)=f(x-6)$，又 $f(x+3)=f(x-3)$，则 $f(x)$的周期 $T=6$，

$\therefore f(-x)=f(x-6)=f(x)$，$\therefore f(x)$为偶函数，故 A 正确；

当 $x\in[0,3]$时，$f(x)=4^x+2x-11$ 单调递增，$\because T=6$，故 $f(x)$在$[-6,-3]$上也单调递增，故 B 不正确；

$f(x)$关于 $x=-3$ 对称且 $T=6$，

$\therefore f(x)$关于 $x=3$ 对称，故 C 正确；$f(100)=f(16\times6+4)=f(4)=f(-2)=f(2)=9$，故 D 正确.

【课堂小结】

江苏省仪征中学2021—2022学年度第二学期高二数学学科作业

第二章　　第5讲　函数性质的综合应用

研制人：张顺军　　　审核人：鲁媛媛

班级：________　姓名：__________　学号：_______　完成日期：2022.5.24（时长：60min）

一、单选题

1. 已知偶函数 $y=f(x)$在区间$(-\infty，0]$上是减函数，那么下列不等式一定成立的是(　　)

A. $f(2)>f(-3)$　　B. $f(-2)<f(1)$

C. $f(-1)>f(2)$　　D. $f(-1)<f(2)$

2. 若定义在R上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$，且在$[0,2)$上单调递减，则下列结论正确的是(　　)

A. $0<f(1)<f(3)$　　B. $f(3)<0<f(1)$

C. $f(1)<0<f(3)$　　D. $f(3)<f(1)<0$

3. 已知奇函数 $f(x)$的定义域为R.若 $f(x+2)$为偶函数，且 $f(1)=1$，则 $f(8)+f(9)$等于(　　)

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

4.已知定义在R上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x)=f(2-x)$．当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=\log_2(x+7)$，则 $f(2\ 021)$等于(　　)

A. 3　　B. -3　　C. -5　　D. 5

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^0}{\sqrt{1-2x}}$，那么函数 $f(x)$的定义域为(　　)

A. $(-\infty，1)$　　B. $\left(-\infty，\dfrac{1}{2}\right)$

C. $(-\infty，0)\cup(0,1)$　　D. $(-\infty，0)\cup\left(0，\dfrac{1}{2}\right)$

★6. 已知函数 $y=f(x)$的定义域为R,对任意 x_1,x_2 且 $x_1\neq x_2$,都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$,则下列说法正确的是(　　)

A．$y=f(x)+x$ 是增函数　　B．$y=f(x)+x$ 是减函数

C．$y=f(x)$是增函数　　D．$y=f(x)$是减函数

二、多选题

7. 若定义在R上的函数 $y=f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$，且函数 $y=f(x-1)$为奇函数，则(　　)

A. 函数 $y=f(x)$是周期函数　　B. 函数 $y=f(x)$的图象关于点$(-1,0)$对称

C. 函数 $y=f(x)$为R上的偶函数　　D. 函数 $y=f(x)$为R上的单调函数

8. 若函数 $f(x)$的定义域为R，且 $f(x)$与 $f(x+1)$都为奇函数，则(　　)

A. $f(x-1)$为奇函数　　B. $f(x)$为周期函数

C. $f(x+3)$为奇函数　　D. $f(x+2)$为偶函数

9.若下表表示 y 是 x 的函数，则(　　)

x	$0<x<5$	$5\leqslant x<10$	$10\leqslant x<15$	$15\leqslant x\leqslant 20$
y	2	3	4	5

A. 函数的定义域是$(0,20]$　　B. 函数的值域是$[2,5]$

C. 函数的值域是$\{2，3，4，5\}$　　D. 函数是增函数

三、填空题

10．已知函数 $f(x)$对任意实数 x 满足 $f(-x)+f(x)=2$，若函数 $y=f(x)$的图象与 $y=x+1$ 有三个交点$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，$(x_3，y_3)$，则 $y_1+y_2+y_3=$________.

11. 已知 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，且 $f(x+4)=f(x)$，当 $1<x\leqslant 3$ 时，$f(x)=x$，那么 $f(-2\,023)=$________.

12. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$在$[1，+\infty)$上单调递减，$f(x+1)$是偶函数，不等式 $f(m+2)\geqslant f(x-1)$对任意的 $x\in[-1，0]$恒成立，那么实数 m 的取值范围是________.

四、解答题

13. 设 $f(x)$是定义域为 R 的周期函数，最小正周期为 2，且 $f(1+x)=f(1-x)$，当$-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=-x$.

(1) 判断 $f(x)$的奇偶性；

(2) 试求函数 $f(x)$在区间$[-1,2]$上的表达式.

14 已知定义域为 R 的单调函数 $f(x)$是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{3}-2^x$.

(1) 求 $f(x)$的解析式；

(2) 若对任意的 $t\in$R，不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

★15.已知定义在 R 上的函数 $f(x)$满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$，且当 $x>0$ 时，$f(x)>-1$.

(1)求 $f(0)$的值，并证明 $f(x)$在 R 上是增函数；

(2)若 $f(1)=1$，解关于 x 的不等式 $f(x^2+2x)+f(1-x)>4$.