

5. 偶函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, $f(3) = 3$, 则 $f(-1) =$ _____.

解析：因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(x)=f(4-x)$ ， $f(-x)=f(4+x)$ ，

又 $f(-x)=f(x)$ ，所以 $f(x)=f(4+x)$ ，则 $f(-1)=f(4-1)=f(3)=3$ 。

答案：3

6. 若 $f(x)=\ln(e^{3x}+1)+ax$ 是偶函数，则 $a=$ _____。

[解析] 函数 $f(x)=\ln(e^{3x}+1)+ax$ 为偶函数，故 $f(-x)=f(x)$ ，即 $\ln(e^{-3x}+1)-ax=\ln(e^{3x}+1)+ax$ ，化简得 $\ln\frac{1}{e^{3x}}=2ax=\ln e^{2ax}$ ，即 $\frac{1}{e^{3x}}=e^{2ax}$ ，整理得 $e^{2ax+3x}=1$ ，所以 $2ax+3x=0$ ，解得 $a=-\frac{3}{2}$ 。

【知识梳理】

【典例探究】

考点一 函数奇偶性的判定

例 1 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^3-\sin x$

(2) $f(x)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x^2-3}$ ；

(3) $f(x)=\frac{\lg(1-x^2)}{|x-2|-2}$ ；

(4) $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & x<0, \\ -x^2+x, & x>0; \end{cases}$

(5) $f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$ 。

解 (1) 由函数奇偶性定义知，函数为奇函数

(2) 由 $\begin{cases} 3-x^2\geq 0, \\ x^2-3\geq 0, \end{cases}$ 得 $x^2=3$ ，解得 $x=\pm\sqrt{3}$ ，

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ ，关于原点对称。

从而 $f(x)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x^2-3}=0$ 。

因此 $f(-x)=-f(x)$ 且 $f(-x)=f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数。

(3) 由 $\begin{cases} 1-x^2>0, \\ |x-2|\neq 2, \end{cases}$ 得定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$ ，关于原点对称。

$\therefore x-2<0$ ， $\therefore |x-2|-2=-x$ ， $\therefore f(x)=\frac{\lg(1-x^2)}{-x}$ 。

又 $\therefore f(-x)=\frac{\lg[1-(-x)^2]}{x}=-\frac{\lg(1-x^2)}{-x}=-f(x)$ ，

∴函数 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 显然函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称.

∵ 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,

$$\text{则 } f(-x) = -(-x)^2 - x = -x^2 - x = -f(x);$$

当 $x > 0$ 时, $-x < 0$,

$$\text{则 } f(-x) = (-x)^2 - x = x^2 - x = -f(x);$$

综上可知, 对于定义域内的任意 x , 总有 $f(-x) = -f(x)$ 成立, ∴ 函数 $f(x)$ 为奇函数.

(5) 显然函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$f(-x) = \log_2[-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}]$$

$$= \log_2(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$= \log_2(\sqrt{x^2 + 1} + x)^{-1}$$

$$= -\log_2(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x),$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

考点二 函数奇偶性的应用

例 2. (1) 若函数 $f(x) = x^3 \left(\frac{1}{2^x - 1} + a \right)$ 为偶函数, 则 a 的值为_____.

答案 $\frac{1}{2}$

解析 方法一 (定义法) ∵ $f(x)$ 为偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\therefore (-x)^3 \left(\frac{1}{2^{-x} - 1} + a \right) = x^3 \left(\frac{1}{2^x - 1} + a \right),$$

$$\therefore 2a = -\left(\frac{1}{2^{-x} - 1} + \frac{1}{2^x - 1} \right) = 1,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}.$$

方法二 (特值法) $f(x)$ 为偶函数,

$$\therefore f(-1) = f(1),$$

$$\text{又 } f(-1) = -a + 2, f(1) = a + 1,$$

$$\therefore -a + 2 = a + 1, \therefore a = \frac{1}{2}.$$

(2) 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 等于()

A. $e^{-x} - 1$

B. $e^{-x} + 1$

C. $-e^{-x} - 1$

D. $-e^{-x} + 1$

答案 D

解析 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,

$\because$ 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$,

$\therefore f(-x) = e^{-x} - 1$.

又 $\because f(x)$ 为奇函数,

$\therefore f(x) = -f(-x) = -e^{-x} + 1$.

(3) 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^5 + 2$. 若 $f(x)$ 在区间 $[-t, t]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m =$ _____.

答案 4

解析 令 $g(x) = ax^3 + bx^5$,

则 $g(x)$ 为奇函数,

当 $x \in [-t, t]$ 时, $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$,

又 $f(x) = g(x) + 2$,

$\therefore M = g(x)_{\max} + 2, m = g(x)_{\min} + 2$,

$\therefore M + m = g(x)_{\max} + 2 + g(x)_{\min} + 2 = 4$.

考点三 函数的周期性、对称性

例 3 (1)(2021 湖南六校联考) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = -f(x+2)$, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = 2^x + \log_2 x$,

则 $f(2020) =$ ()

A . 5

B. $\frac{1}{2}$

C . 2

D . - 5

(2) 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x) (x \in \mathbb{R})$, 且在区间 $(-2, 2]$ 上, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ \left| x + \frac{1}{2} \right|, & -2 < x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(f(15))$ 的值

为_____.

[解析] (1) 由 $f(x) = -f(x+2)$,

得 $f(x+4) = f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

所以 $f(2020) = f(505 \times 4) = f(0) = -f(0+2)$

$= -(2^2 + \log_2 2) = -5$.

(2) 由函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x) (x \in \mathbb{R})$,

可知函数 $f(x)$ 的周期是 4,

所以 $f(15) = f(-1) = \left| -1 + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$,

所以 $f(f(15)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

[答案] (1) D (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) (多选)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 对任意 x 都有 $f(2+x)=f(2-x)$, 且 $f(-x)=f(x)$, 则下列结论正确的是()

A. $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称

B. $f(x)$ 的图象关于 $(2,0)$ 对称

C. $f(x)$ 的最小正周期为 4

D. $y=f(x+4)$ 为偶函数

答案 ACD

解析 $\because f(2+x)=f(2-x)$, 则 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称, 故 A 正确, B 错误;

$\because$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称, 则 $f(-x)=f(x+4)$, 又 $f(-x)=f(x)$, $\therefore f(x+4)=f(x)$, $\therefore T=4$, 故 C 正确;

$\because T=4$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 故 $y=f(x+4)$ 为偶函数, 故 D 正确

【课堂小结】

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科作业

第二章 第 4 讲 奇偶性、对称性与周期性

研制人：张顺军

审核人：鲁媛媛

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 完成日期：2022.5.20 (时长：60min)

一、单选题

1. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 0, \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$ 为奇函数，则 $f(g(-1))$ 的值为()
- A. 15 B. 10 C. -10 D. -15
2. (2021 烟台二模) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数， $f(2-x) = f(x)$ ，当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = x^3$ ，那么()
- A. $f(2021) = 0$ B. 2 是 $f(x)$ 的一个周期
- C. 当 $x \in (1, 3)$ 时， $f(x) = (1-x)^3$ D. $f(x) > 0$ 的解集为 $(4k, 4k+2) (k \in \mathbf{Z})$
3. 已知 $f(x)$ 满足 $f(x-1) = f(x+1)$ ，若 $f(1) = 1$ ， $f(0) = 0$ ，则 $f(2020) + f(2021)$ 等于()
- A. -1 B. 0
- C. 1 D. 2
4. 已知奇函数 $f(x)$ 对任意的实数 x 都满足 $f(x+4) + f(x) = 2f(2)$ ，若 $f(-1) + f(-2) = 2$ ，则 $f(2021)$ 等于()
- A. 0 B. 2
- C. -2 D. 2021
5. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的奇函数，当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) = 4^x$ ，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) + f(1)$ 等于()
- A. -2 B. 0 C. 2 D. 1

二、多选题

6. (多选) 已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(2-x) = 0$ ，那么下列说法正确的是()
- A. 函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数
- B. 函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数
- C. 函数 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数
- D. 函数 $f(x-1)$ 为奇函数
7. (多选) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ，则下列结论正确的是()
- A. $|f(x)| \geq 2$ B. 当 $x < 0$ 时， $f(x) = -x^2 - 2x - 3$
- C. $x = 1$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴 D. $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增

三、填空题

8. 若函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 3 的奇函数，且 $f(-1) = 2f(10) + 3$ ，那么 $f(2021) = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 已知集合 $A = \{x | y = \log_2(2-x)\}$ ， $B = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$ ，那么 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$. (结果用区间或集合表示)
11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x)$ ，若当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $f(x) = x(1-x)$ ，则当 $-1 \leq x \leq 0$ 时， $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

★12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 满足以下三个条件:

①对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+1) = f(x-1)$;

②函数 $y = f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称;

③对于任意的 $x_1, x_2 \in [0,1]$, 都有 $(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) > 0$

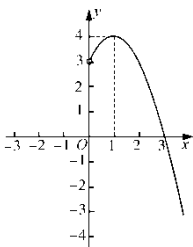
则 $f(\frac{3}{2})$ 、 $f(2)$ 、 $f(3)$ 从小到大的关系是_____。

四、解答题

13. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上的图象如图所示.

(1) 在平面直角坐标系中补全函数 $y = f(x)$ 的图象;

(2) 解不等式 $x^3[f(x) - f(-x)] > 0$.



14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 对任意实数 x, y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$ 且 $f(3) = -4$.

(1) 求证: $f(x)$ 为奇函数;

(2) 在区间 $[-9, 9]$ 上, 求 $f(x)$ 的最值.

★15. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且对任意实数 x , 恒有 $f(x+2) = -f(x)$. 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = 2x - x^2$.

(1) 求证: $f(x)$ 是周期函数;

(2) 当 $x \in [2, 4]$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式.