

C. $a^b > a^a > b^a$

D. $\log_c a < \log_c b$

8. 若二项式 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$ 展开式中所有项的系数之和为 a_n ，所有项的系数绝对值之和为 b_n ，二项式系数之和为 c_n ，则 ()

A. $a_n < b_n < c_n$

B. $\frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{10}{3}$

C. 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 均有 $a_n + b_n \leq c_n$

D. 存在 $n \in \mathbf{N}^*$ 使得 $a_n + b_n > c_n$

9. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的极值点分别为 x_1, x_2 ，则下列命题正确的是 ()

A. $a^2 > 3b$

B. $x_1^2 + x_2^2 > b$

C. 若 $f(x_1)f(x_2) < 0$ ，则 $f(x)$ 有三个零点

D. $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

三、填空题

10. 回归方程 $\hat{y} = 2.5x + 0.31$ 在样本 $(4, 1.2)$ 处的残差为_____.

11. 某种动物活到 20 岁的概率是 0.8，活到 25 岁的概率是 0.4，现龄 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是_____.

12. 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|$ ， $x_1 < 0$ ， $x_2 > 0$ ，函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 处和点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的两条切线互相垂直，且分别交 y 轴于 M ， N 两点，则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围是_____.

四、解答题

13. 设函数 $f(x, y) = \left(1 + \frac{m}{y}\right)^x$ ($m > 0, y > 0$).

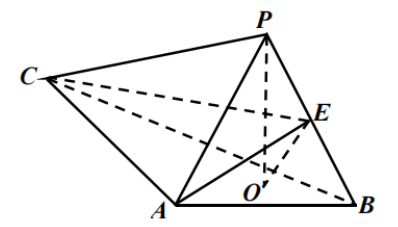
(1) 当 $m = 3$ 时，求 $f(6, y)$ 的展开式中二项式系数最大的项；

(2) 若 $f(4, y) = a_0 + \frac{a_1}{y} + \frac{a_2}{y^2} + \frac{a_3}{y^3} + \frac{a_4}{y^4}$ 且 $a_3 = 32$ ，求 $\sum_{i=0}^4 a_i$.

14. (2022 年新高考 II 卷) 如图, PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高, $PA = PB$, $AB \perp AC$, E 是 PB 的中点.

(1) 证明: $OE \parallel$ 平面 PAC ;

(2) 若 $\angle ABO = \angle CBO = 30^\circ$, $PO = 3$, $PA = 5$, 求二面角 $C-AE-B$ 正弦值.



15. 2020 年 4 月 8 日, 武汉市雷神山医院为确诊新型冠状病毒肺炎患者, 需要检测核酸是否为阳性, 现有 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 份核酸样本, 有以下两种检测方式: (1) 逐份检测, 则需要检测 n 次; (2) 混合检测, 将其中 $k(k \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } k \geq 2)$ 份核酸样本分别取样混合在一起检测, 若检测结果为阴性, 这 k 份核酸样本全为阴性, 因而这 k 份核酸样本只要检测一次就够了, 如果检测结果为阳性, 为了明确这 k 份核酸样本究竟哪几份为阳性, 就要对这 k 份样本再逐份检测, 此时这 k 份核酸样本的检测次数总共为 $k+1$ 次. 假设在接受检测的核酸样本中, 每份样本的检测结果是阳性还是阴性都是独立的, 且每份样本是阳性结果的概率为

$p(0 < p < 1)$.

(1) 假设有 5 份核酸样本, 其中只有 2 份样本为阳性, 若采用逐份检测方式, 求恰好经过 4 次检测就能把阳性样本全部检测出来的概率.

(2) 现取其中 $k(k \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } k \geq 2)$ 份核酸样本, 记采用逐份检测方式, 样本需要检测的总次数为 ξ_1 , 采用混合检测方式, 样本需要检测的总次数为 ξ_2 .

① 试运用概率统计的知识, 若 $E\xi_1 = E\xi_2$, 试求 p 关于 k 的函数关系式 $p = f(k)$;

②若 $p = 1 - \frac{3}{\sqrt[3]{e}}$ ，用混合检测方式可以使得样本需要检测的总次数的期望值比逐份检测的总次数期望值更少，求 k 的最大值.

参考数据： $\ln 2 \approx 0.6931, \ln 3 \approx 1.0986, \ln 4 \approx 1.3863, \ln 5 \approx 1.6094, \ln 6 \approx 1.7918$

16. 已知函数 $f(x) = x \ln x + \frac{3}{2}x^2 - (a+1)x + b$.

(1) 当 $a = 3$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) e 为自然对数的底数，若 $a \in (\frac{3}{e} - 1, 3e + 1)$ 时， $f(x) \geq 0$ 恒成立，证明： $b - 2a + 6 > 0$.