

# 江苏省仪征中学 2021—2022 学年度高二数学第二学期周练 10 试卷

测试范围：集合与简易逻辑、不等式、函数导数、空间向量、计数原理、概率、统计

命题人：冯杰

审题人：鲁媛媛

时间：2022 年 6 月 9 日

## 一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1. 集合  $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ ,  $S = \{1,4,5\}$ ,  $T = \{2,3,4\}$ , 则  $S \cap (C_U T)$  等于( ).

- A.  $\{1,4,5,6\}$                       B.  $\{1,5\}$                       C.  $\{4\}$                       D.  $\{1,2,3,4,5\}$

2. 已知  $a \in R$ , 则 “ $a > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < 1$ ” 的( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件      C. 充要条件                      D. 既不充分又不必要条件

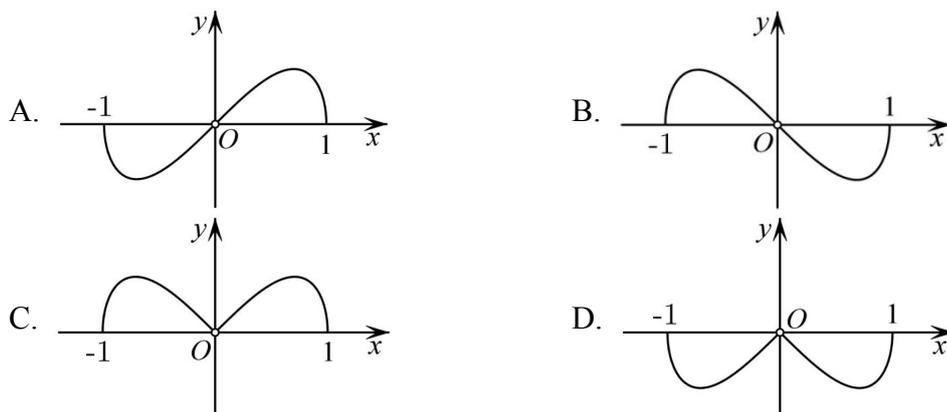
3. 已知  $x > 0$ ,  $y > 0$ , 且  $x + 3y - 5xy = 0$ , 则  $3x + 4y$  的最小值是( )

- A. 3                                      B.  $\frac{24}{5}$                                       C. 5                                      D. 3

4. 已知  $f(x) = ax^3 + bx - 4$ , 其中  $a + b$  为常数, 若  $f(-2021) = 2$ , 则  $f(2021) = ( )$

- A. -10                                      B. -2                                      C. 10                                      D. 2

5. 函数  $f(x) = \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{|x+1|-1}$  的图象大致是( )



6. 某龙舟队有 9 名队员, 其中 3 人只会划左舷, 4 人只会划右舷, 2 人既会划左舷又会划右舷. 现要选派划左舷的 3 人、右舷的 3 人共 6 人去参加比赛, 则不同的选派方法共有( )

- A. 56 种                                      B. 68 种                                      C. 74 种                                      D. 92 种

7. 有 5 条同样的生产线, 生产的零件尺寸(单位: mm) 都服从正态分布  $N(20, \sigma^2)$ , 且  $P(19 < X \leq 21) = \frac{2}{3}$ . 在每条生产线上各取一个零件, 恰好有 3 个尺寸在区间  $(20, 21]$  的概率为( ).

- A.  $\frac{64}{243}$                                       B.  $\frac{80}{243}$                                       C.  $\frac{16}{81}$                                       D.  $\frac{40}{243}$

8. 定义: 如果函数  $y = f(x)$  在定义域内给定区间  $[a, b]$  上存在  $x_0 (a < x_0 < b)$ , 满足  $f(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ , 则称函数  $y = f(x)$  是  $[a, b]$  上的 “平均值函数”,  $x_0$  是它的一个均值点, 如  $y = x^2$  是  $[-1, 1]$  上的平均值函数, 0 就是它的均值点, 现有函数  $f(x) = x^3 + tx$  是  $[-1, 1]$  上的平均值函数, 则实数  $t$  的取值范围是( )

- A.  $(-3, -\frac{3}{4}]$                                       B.  $(-3, -\frac{3}{4})$                                       C.  $[-3, -\frac{3}{4}]$                                       D.  $(-\infty, -\frac{3}{4}]$



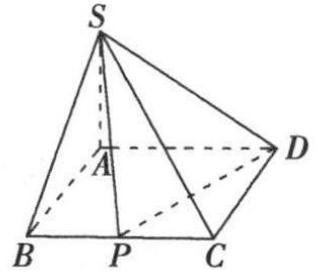
四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 若  $(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}})^n$  展开式中前三项的系数和为 163，求：

- (1) 展开式中所有  $x$  的有理项； (2) 展开式中系数最大的项.

18. 如图，四棱锥  $S-ABCD$  的底面是矩形， $AB = a$ ， $AD = 2$ ， $SA = 1$ ，且  $SA \perp$  底面  $ABCD$ ，若棱  $BC$  上存在异于  $B$ ， $C$  的一点  $P$ ，使得  $\overrightarrow{PS} \perp \overrightarrow{PD}$ .

- (1) 求实数  $a$  的取值范围；  
(2) 当  $a$  取最大值时，求点  $P$  到平面  $SCD$  的距离.



19. 手机芯片是一种硅板上集合多种电子元器件实现某种特定功能的电路模块，是电子设备中最重要的部分，承担着运输和存储的功能. 某公司研发了一种新型手机芯片，该公司研究部门从流水线上随机抽取 100 件手机芯片，统计其性能指数并绘制频率分布直方图(如图 1)：

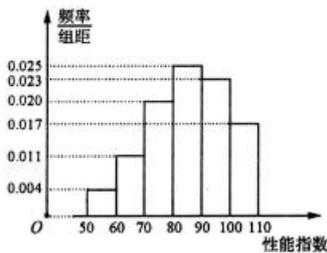


图 1

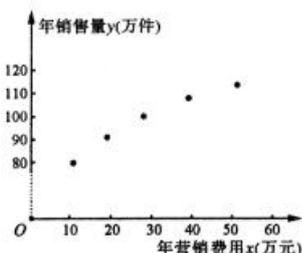


图 2

产品的性能指数在  $[50,70)$  的称为  $A$  类芯片，在  $[70,90)$  的称为  $B$  类芯片，在  $[90,110]$  的称为  $C$  类芯片，以这 100 件芯片的性能指数位于各区间的频率估计芯片的性能指数位于该区间的概率.

(I) 在该流水线上任意抽取 3 件手机芯片，求  $C$  类芯片不少于 2 件的概率；

(II) 该公司为了解年营销费用  $x$  (单位：万元) 对年销售量  $y$  (单位：万件) 的影响，对近 5 年的年营销费用  $x_i$  和年销售量  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 数据做了初步处理，得到的散点图如图 2 所示.

(i) 利用散点图判断， $y = a + bx$  和  $y = c \cdot x^d$  (其中  $c, d$  为大于 0 的常数) 哪一个更适合作为年营销费用和年销售量的回归方程类型 (只要给出判断即可，不必说明理由)；

(ii) 对数据作出如下处理：令  $u_i = \ln x_i$ ， $v_i = \ln y_i$ ，得到相关统计量的值如下表：

|                    |                    |                      |                        |                    |                    |                      |                        |
|--------------------|--------------------|----------------------|------------------------|--------------------|--------------------|----------------------|------------------------|
| $\sum_{i=1}^5 x_i$ | $\sum_{i=1}^5 y_i$ | $\sum_{i=1}^5 x_i^2$ | $\sum_{i=1}^5 x_i y_i$ | $\sum_{i=1}^5 u_i$ | $\sum_{i=1}^5 v_i$ | $\sum_{i=1}^5 u_i^2$ | $\sum_{i=1}^5 u_i v_i$ |
| 150                | 725                | 5500                 | 15750                  | 16                 | 25                 | 56                   | 82.4                   |

根据 (i) 的判断结果及表中数据，求  $y$  关于  $x$  的回归方程；

(iii)由所求的回归方程估计, 当年营销费用为 100 万元时, 年销量 $y$ (万件)的预报值. (参考数据:  $e^{3.4} = 30$ )

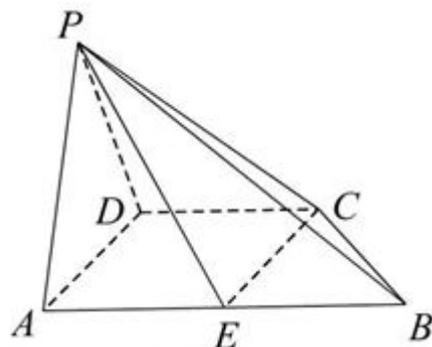
参考公式: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小

二乘估计分别为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}$ ,  $\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$ .

20. 在四棱锥 $P - ABCD$ 中,  $AB // CD$ ,  $AB = 2CD = 2BC = 2AD = 4$ ,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $AE = BE$ ,  $\triangle PAD$ 为正三角形, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ .

(1)求二面角 $P - EC - D$ 的余弦值;

(2)线段 $PC$ 上是否存在一点 $M$ , 使得异面直线 $DM$ 和 $PE$ 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ? 若存在, 指出点 $M$ 的位置; 若不存在, 请说明理由.



21. 某用人单位在一次招聘考试中, 考试卷上有 $A, B, C$ 三道不同的题, 现甲、乙两人同时去参加应聘考试, 他们考相同的试卷已知甲考生对 $A, B, C$ 三道题中的每一题能解出的概率都是 $\frac{2}{3}$ , 乙考生对 $A, B, C$ 三道题能解出的概率分别是 $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ , 且甲、乙两人解题互不干扰, 各人对每道题是否能解出是相互独立的.

(1)求甲至少能解出两道题的概率;

(2)设 $X$ 表示乙在考试中能解出题的道数, 求 $X$ 的数学期望;

(3)按照“考试中平均能解出题数多”的择优录取原则, 如果甲、乙两人只能有一人被录取, 你认为谁应该被录取, 请说出理由.

22. 已知函数 $f(x) = a \ln x + x + a$ ,  $g(x) = xe^x + 1$

(1)当 $a = 1$ 时, 求函数 $F(x) = g(x) - f(x)$ 的最小值;

(2)当 $a < -1$ 时, 求证 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2$ , 并且 $\ln x_1 + \ln x_2 > 0$ .