

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

第一章 第 3 讲 全称量词和存在量词

研制人：鲁媛媛

审核人：周国祥

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：2022.5.10

【本课在课程标准中的表述】

(1) 全称量词与存在量词：通过已知的数学实例，理解全称量词与存在量词的意义。

(2) 全称量词命题与存在量词命题的否定：

①能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定。

②能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定。

【课前热身】

1.命题“ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ”的否定是“_____”。

2.命题“ $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 0$ ”的否定是_____。

3.命题“对于函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x} (a \in \mathbb{R})$ ，存在 $a \in \mathbb{R}$ ，使得 $f(x)$ 是偶函数”为_____命题。(填“真”或“假”)

4.(多选题)(角度 2)下列命题中是真命题的有()

A. $\forall x \in \mathbb{R}, 2^{x-1} > 0$

B. $\forall x \in \mathbb{N}^*, (x-1)^2 > 0$

C. $\exists x \in \mathbb{R}, \lg x < 1$

D. $\exists x \in \mathbb{R}, \tan x = 2$

5.(2020 南京调研)能说明命题“ $\forall x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$ ”是假命题的 x 的值可以是_____(写出一个即可)。

6.若命题“ $\exists x \in \mathbb{R}$ ，有 $x^2 - mx - m < 0$ ”是假命题，则实数 m 的取值范围是_____。

【知识梳理】

【典例探究】

考点一 全称(存在性)命题的真假判断

例 1 (1)以下四个命题中既是存在性命题又是真命题的是()

A. 锐角三角形有一个内角是钝角

B. 至少有一个实数 x ，使 $x^2 \leq 0$

C. 两个无理数的和必是无理数

D. 存在一个负数 x ， $\frac{1}{x} > 2$

(2)(选修 2-1P₂₃T2 改编)下列命题中的假命题是(C)

A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, \lg x_0 = 1$

B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, \sin x_0 = 0$

C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^3 > 0$

D. $\forall x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$

考点二 含有量词命题的否定

例 2.(1)设命题 p: 所有正方形都是平行四边形, 则命题 p 的否定为()

A. 所有正方形都不是平行四边形

B. 有的平行四边形不是正方形

C. 有的正方形不是平行四边形

D. 不是正方形的四边形不是平行四边形

(2)(角度 1)命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 1 < f(x_0) \leq 2$ ”的否定形式是()

A. $\forall x \in \mathbf{R}, 1 < f(x) \leq 2$

B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 1 < f(x_0) \leq 2$

C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, f(x_0) \leq 1$ 或 $f(x_0) > 2$

D. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq 1$ 或 $f(x) > 2$

考点三 由命题的真假求参数的取值范围

例 3 (1)(2020 扬州模拟)若“ $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right], m \leq \tan x + 2$ ”为真命题, 则实数 m 的最大值为 _____.

(2) 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $g(x) = 2x + a$, 若 $\forall x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \exists x_2 \in [2, 3]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【课堂小结】

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科作业

第一章 第 3 讲 全称量词和存在量词

研制人：鲁媛媛

审核人：周国祥

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 完成日期：2022.5.10 (时长：60min)

一、单选题

1. (2021 长沙期末)命题 p : “ $\forall x \in \mathbf{N}^*, \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{2}$ ” 的否定为()

- A. $\forall x \in \mathbf{N}^*, \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{2}$ B. $\forall x \notin \mathbf{N}^*, \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{2}$
C. $\exists x \notin \mathbf{N}^*, \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{2}$ D. $\exists x \in \mathbf{N}^*, \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{2}$

2. 若命题 p : $\forall x \in \mathbf{R}, 2x^2 - 1 > 0$, 则该命题的否定是()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, 2x^2 - 1 < 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, 2x^2 - 1 \geq 0$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, 2x^2 - 1 \leq 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, 2x^2 - 1 < 0$

3. 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, f(x)g(x) \neq 0$ ” 的否定是()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x)=0$ 且 $g(x)=0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x)=0$ 或 $g(x)=0$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x)=0$ 且 $g(x)=0$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x)=0$ 或 $g(x)=0$

4. 已知 p : $\exists x_0 \in [0, \pi]$, 使得 $\sin x_0 < a$, q : 对 $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$, $\frac{1}{x} + 1 > a$, 若 p 和 q 都为真命题, 则 a 的取值范围是()

- A. $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ B. $(0, 3)$ C. $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ D. $(1, 3)$

二、多选题

5. (2021·海口期中)(多选)下列关于二次函数 $y = (x-2)^2 - 1$ 的说法正确的是()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, y = (x-2)^2 - 1 \geq 1$ B. $\forall a > -1, \exists x_0 \in \mathbf{R}, y = (x_0-2)^2 - 1 < a$
C. $\forall a < -1, \exists x_0 \in \mathbf{R}, y = (x_0-2)^2 - 1 = a$ D. $\exists x_1 \neq x_2, (x_1-2)^2 - 1 = (x_2-2)^2 - 1$

6. (多选) 设非空集合 P, Q 满足 $P \cap Q = Q$, 且 $P \neq Q$, 则下列选项正确的是()

- A. $\forall x \in Q$, 有 $x \in P$ B. $\exists x \notin P$, 使得 $x \in Q$
C. $\exists x \notin Q$, 使得 $x \in P$ D. $\forall x \notin Q$, 有 $x \notin P$

7. (多选) (2021·烟台调研)下列命题中是真命题的有()

- A. 对任意 $x \in \mathbf{R}, 3^x > 0$ B. 存在 $x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$
C. 对任意 $x \in \mathbf{R}, \sin x < 2^x$ D. 存在 $x \in \mathbf{R}, \cos x > x^2 + x + 1$

8. (多选)下列四个命题中, 为假命题的是()

- A. $\exists x \in (0, 1), 2^x = \frac{1}{x}$
B. “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 1 > 0$ ” 的否定是 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 1 < 0$ ”

C. “函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ” 是 “ $f(x)$ 在 (a, b) 内单调递增” 的充要条件

D. 已知 $f(x)$ 在 x_0 处存在导数, 则 “ $f'(x_0) = 0$ ” 是 “ x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点” 的必要不充分条件

9. (多选)下列命题正确的是()

- A. $\exists x > 0, \ln x + \frac{1}{\ln x} \leq 2$

B. 命题“ $\exists x \in (0, +\infty), \ln x = x - 1$ ”的否定是“ $\forall x \in (0, +\infty), \ln x \neq x - 1$ ”

C. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ”是“ $x^2 + y^2 \geq 4$ ”的必要不充分条件

D. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a \neq 0$ ”是“ $ab \neq 0$ ”的必要不充分条件

三、填空题

10. (2021·保定期末) 已知函数 $y_1 = m(x - 2m)(x + m + 3)$, $y_2 = x - 1$, 若它们同时满足条件: ① $\forall x \in \mathbf{R}, y_1 < 0$ 或 $y_2 < 0$; ② $\exists x \in \{x | x < -4\}, y_1 y_2 < 0$. 则 m 的取值范围是_____.

11. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = ax - 1$, 若 $\forall x_1 \in [-1, 2], \exists x_2 \in [-1, 2]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 则 a 的取值范围为_____.

12. 下列四个命题:

① $\exists x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^x$; ② $\exists x \in (0, 1), \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$;

③ $\forall x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{2}} x$; ④ $\forall x \in \left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^x < \log_{\frac{1}{3}} x$.

其中真命题的序号为_____.

13. 已知 $p: \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], 2x > m(x^2 + 1)$, $q: \text{函数 } f(x) = 4^x + 2^{x+1} + m - 1 \text{ 存在零点}$. 若命题 p, q 一真一假, 则实数 m 的取值范围是_____.

四、解答题

14. 已知命题 $p: \forall x \in [-1, 1], 2^x - k - 1 \leq 0$ 恒成立; 命题 $q: \exists x \in [0, 1], \text{使得 } 2x - 2 \geq k^2 - 3k \text{ 成立}$.

(1) 若 p 为真命题, 求实数 k 的取值范围;

(2) 若命题 p 和 q 有且仅有一个为真, 求实数 k 的取值范围.