

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

第一章 第 6 讲 基本不等式 (1)

研制人: 鲁媛媛

审核人: 周国祥

班级: _____ 姓名: _____

学号: _____

授课日期: 2022.5.13

【本课在课程标准中的表述】

掌握基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a \geq 0, b \geq 0)$, 结合具体实例, 能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题。

【课前热身】

1. 已知 $x > 0, y > 0, xy = 16$, 则 $x + y$ 的最小值为()

- A. 32 B. 24 C. $4\sqrt{2}$ D. 8

2. 若 $x > 0, y > 0$, 且 $2(x+y) = 36$, 则 $\sqrt{xy}$ 的最大值为()

- A. 9 B. 18 C. 36 D. 81

3. 在下列各函数中, 最小值等于 2 的函数是()

- A. $y = x + \frac{1}{x}$ B. $y = \sin x + \frac{1}{\sin x} (0 < x < \frac{\pi}{2})$ C. $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ D. $y = e^x + \frac{4}{e^x} - 2$

4. (多选) 若正数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则下列说法正确的是()

- A. ab 有最大值 $\frac{1}{4}$ B. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最小值 $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最小值 4 D. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 若实数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $x^2 + 2y^2$ 的最小值为_____.

6. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{xy}{2y+3x} = 1$, 不等式 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

【知识梳理】

【典例探究】

题型一 利用基本不等式求最值

考法一 配凑法求最值

例 1. (1) 已知 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1} (x > 0)$, 则 $f(x)$ 的最小值是()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

(2) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $ab = 1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为_____.

考法二 常数代换法求最值

例 2. (1) 已知函数 $y = \log_a(x-1) + 2 (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象恒过定点 A. 若直线 $mx + ny = 2$ 过点 A, 其中 $m,$

n 是正实数, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值是()

- A. $3 + \sqrt{2}$ B. $3 + 2\sqrt{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. 5

(2) 已知 $a > 0, b > 0, 3a + b = 2ab$, 则 $a + b$ 的最小值为_____.

考法三 消元法求最值

例 3. 已知正数 x, y 满足 $x^2 + 2xy - 3 = 0$, 则 $2x + y$ 的最小值是()

- A. 1 B. 3 C. 6 D. 12

考法四 构造不等式求最值

例 4. (1) 已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 且 $a+2b=ab-16$, 则 ab 的最小值为()

A. 16 B. 32 C. 64 D. 128

(2) 已知 $x>0, y>0, x+3y+xy=9$, 则 $x+3y$ 的最小值为_____.

考法五 利用换元法求最值

例 5. 已知 $x>0, y>0$ 且 $x+y=5$, 则 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2}$ 的最小值为_____.

【课堂小结】

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科作业

第一章 第 6 讲 基本不等式 (1)

研制人: 鲁媛媛

审核人: 周国祥

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____ 完成日期: 2022.5.13 (时长: 60min)

一、单选题

1. 若 $a>0$, $b>0$, $a+b=ab$, 则 $a+b$ 的最小值为()

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

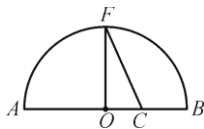
2. 若 $x>0$, 则函数 $y=x+\frac{1}{2x+1}$ 的最小值为()

- A. $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{2}+1$ D. $\sqrt{2}-1$

3. (2021 黄山一模)已知 $\mathbf{a}=(1, x)$, $\mathbf{b}=(y, 1)$, $x>0$, $y>0$. 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\frac{xy}{x+y}$ 的最大值为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

4. 《几何原本》卷 2 的几何代数法(以几何方法研究代数问题)成了后世西方数学家处理问题的重要依据, 通过这一原理, 很多的代数的公理或定理都能够通过图形实现证明, 也称之为无字证明. 现有如图所示的图形, 点 F 在半圆 O 上, 点 C 在直径 AB 上, 且 $OF \perp AB$, 设 $AC=a$, $BC=b$, 则该图形可以完成的无字证明为()



(第 4 题)

A. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a>0, b>0)$

B. $a^2+b^2 \geq 2\sqrt{ab} (a>0, b>0)$

C. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} (a>0, b>0)$

D. $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a>0, b>0)$

二、多项选择题

5. (2021 龙岩二模)已知 $a>0$, $b>0$, 且 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$, 则下列结论正确的是()

A. $a>1$

B. ab 的最小值为 16

C. $a+b$ 的最小值为 8

D. $\frac{1}{a-1}+\frac{9}{b}$ 的最小值为 2

6. (2021 茂名一模)若正实数 a, b 满足 $a+b=1$, 则下列选项中正确的是()

A. ab 有最大值 $\frac{1}{4}$

B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 有最小值 4

D. a^2+b^2 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 设 $a>0$, $b>0$, 则下列不等式中一定成立的是()

A. $a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2}$

B. $\frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{ab}$

$$C. \frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} \geq a+b$$

$$D. (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$$

★8. (2021 聊城二模) 已知 $m > 1$, $n > 0$, 且 $m^2 + 2n = 3m$, 则 $\frac{2}{m-1} + \frac{m}{4n}$ 的最小值为()

$$A. \frac{9}{4}$$

$$B. \frac{9}{2}$$

$$C. \frac{3}{2}$$

$$D. 2$$

三、 填空题

9. 规定: “ $\otimes$ ” 表示一种运算, 即 $a \otimes b = \sqrt{ab} + a + b$ (a, b 为正实数). 若 $1 \otimes k = 3$, 则 k 的值为_____, 此时函数 $f(x) = \frac{k \otimes x}{\sqrt{x}}$ 的最小值为_____.

10. (2021 信阳模拟) 已知角 α, β 的顶点都为坐标原点, 始边都与 x 轴的非负半轴重合, 且都为第一象限角, α, β 的终边上分别有点 $A(1, a), B(2, b)$, 且 $\alpha = 2\beta$, 则 $\frac{1}{a} + b$ 的最小值为_____.

11. (2021 上海奉贤二模) 三个同学对问题 “已知 m, n 均为正实数, $m+n=1$, 求 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值” 提出各自的解题思路:

甲: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{m} + \frac{m+n}{n} = 2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n}$, 可用基本不等式求解;

乙: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn} = \frac{1}{mn} = \frac{1}{m(1-m)}$, 可用二次函数配方法求解;

丙: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)(m+n) = 2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n}$, 可用基本不等式求解.

参考上述解题思路, 可求得当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $y = \frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{100-x^2}$ ($0 < x < 10, a > 0$) 有最小值.

四、 解答题

12. (1) 已知正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = 1$, 若不等式 $a+b \geq -x^2 + 4x + 18 - m$ 对任意实数 x 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

(2) 若 $x > 0, y > 0$ 且 $x+y=xy$, 求 $\frac{x}{x-1} + \frac{2y}{y-1}$ 的最小值.

13. 设函数 $f(x)=ax^2+(b-2)x+3(a\neq 0)$.

(1) 若 $b=-a-3$, 求不等式 $f(x)<-4x+2$ 的解集;

(2) 若 $f(1)=4$, $b>-1$, 求 $\frac{1}{|a|}+\frac{|a|}{b+1}$ 的最小值.

★14. (1) 设 a, b 为正实数, 且 $a+b=3$, 求 $\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+1}$ 的最小值.

(2) 已知 $x>0$, $y>-1$, 且 $x+y=1$, 求 $\frac{x^2+3}{x}+\frac{y^2}{y+1}$ 的最小值.

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

第一章 第 6 讲 基本不等式 (2)

研制人: 鲁媛媛

审核人: 周国祥

班级: _____ 姓名: _____

学号: _____

授课日期: 2022.5.16

【本课在课程标准中的表述】

掌握基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a \geq 0, b \geq 0)$, 结合具体实例, 能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题。

【课前热身】

1. 函数 $y = \frac{x}{x^2+1} (x > 0)$ 的最大值为_____.

2. 函数 $y = \frac{x^2}{x-1} (x > 1)$ 的最小值为_____.

3. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} + 2$ 的值域为 $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$, 则 a 的值是()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. 2

4. (多选)下列结论中, 所有正确的结论有()

A. 若 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$, 则 $a - c^2 > b - c^2$

B. 若 $a, b, m \in \mathbf{R}_+$, 则 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$

C. 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 2$

D. 若 $a, b \in \mathbf{R}_+$, $a+b=1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$.

5. 若把总长为 20 m 的篱笆围成一个矩形场地, 则矩形场地的最大面积是_____ m^2 .

6. 要制作一个容积为 4 m^3 , 高为 1 m 的无盖长方体容器. 已知该容器的底面造价是每平方米 20 元, 侧面造价是每平方米 10 元, 则该容器的最低总造价是_____元.

【知识梳理】

【典例探究】

题型二 基本不等式的综合应用

命题点 1 求参数值或取值范围

例 6 (1) (2021·厦门联考)对任意 $m, n \in (0, +\infty)$, 都有 $m^2 - amn + 2n^2 \geq 0$, 则实数 a 的最大值为()

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $\frac{9}{2}$

(2) 已知对满足 $x+y+4=2xy$ 的任意正实数 x, y 都有 $x^2+2xy+y^2-ax-ay+1 \geq 0$, 那么实数 a 的取值范围是_____.

变式: (1) 设 $k > 0$, 若关于 x 的不等式 $kx + \frac{4}{x-1} \geq 12$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 则 k 的最小值为_____.

(2) 已知 $x > y > 0$, 且 $xy = 1$, 若 $x^2 + y^2 \geq a(x-y)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

命题点 2 基本不等式与其他知识交汇的最值问题

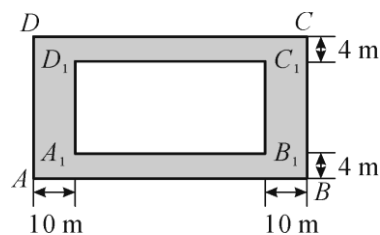
例 7 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 其前 n 项和是 S_n , 若 $a_1 = d = 1$, 则 $\frac{S_n + 8}{a_n}$ 的最小值是_____.

(2)若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $3\sin A=\sin B+\sin C$,则 $\cos A$ 的最小值是()

题型三 基本不等式的实际应用

例 8 某房地产开发公司计划在一楼区内建造一个长方形公园 $ABCD$, 公园由形状为长方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的休闲区和环公园人行道(阴影部分)组成. 已知休闲区 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为 $4\,000\text{ m}^2$, 人行道的宽分别为 4 m 和 10 m (如图所示).

- (1) 若设休闲区的长和宽的比 $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=x(x>1)$, 求公园 $ABCD$ 所占面积 S 关于 x 的函数 $S(x)$ 的解析式;
- (2) 要使公园所占面积最小, 则休闲区 $A_1B_1C_1D_1$ 的长和宽该如何设计?



变式：某造纸厂拟建一座底面图形为矩形且面积为 162 m^2 的三级污水处理池，池的深度一定(平面图如图所示)，如果池四周围墙建造单价为 400 元/米，中间两道隔墙建造单价为 248 元/米，池底建造单价为 80 元/平方米，水池所有墙的厚度忽略不计.



(1) 设计污水处理池的宽为 x (单位: m)，总造价为 y (单位: 元)，求 x 关于 y 的表达式，并求出 y 的最小值；

(2) 若由于地形限制，该池的长和宽都不能超过 16 m，试设计污水处理池的长和宽，使总造价最低，并求出最低总造价.

【课堂小结】

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科作业

第一章 第 6 讲 基本不等式 (2)

研制人: 鲁媛媛 审核人: 周国祥

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____ 完成日期: 2022.5.16 (时长: 60min)

一、单选题

1. 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则下列结论不正确的是()
A. $a^2 < b^2$ B. $ab < b^2$ C. $a + b < 0$ D. $|a| + |b| > |a + b|$
2. 若 $a < b < 0$, 则下列不等式一定成立的是()
A. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{b}$ B. $a^2 < ab$ C. $\frac{|b|}{|a|} < \frac{|b|+1}{|a|+1}$ D. $a^n > b^n$
3. (2020 长沙期中)在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes$: $A \otimes B = (A-2)B$, 若不等式 $(t-x) \otimes (x+t) < 4$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是()
A. $(-3, 1)$ B. $(-1, 2)$ C. $(-1, 3)$ D. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
4. 已知不等式 $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}\right) \geq 9$ 对任意正实数 x, y 恒成立, 则正实数 a 的最小值为()
A. 2 B. 4 C. 6 D. 8
5. 已知直线 $ax + by + c - 1 = 0 (b > 0, c > 0)$ 经过圆 $x^2 + y^2 - 2y - 5 = 0$ 的圆心, 则 $\frac{4}{b} + \frac{1}{c}$ 的最小值是()
A. 9 B. 8 C. 4 D. 2
6. 设 $m = \log_{0.3} 0.6$, $n = \frac{1}{2} \log_2 0.6$, 则()
A. $m - n > mn > m + n$ B. $m - n > m + n > mn$
C. $mn > m - n > m + n$ D. $m + n > m - n > mn$

二、多选题

7. (多选)已知一个矩形的周长为 l , 面积为 S , 则下列四组数对中, 可作为数对 (S, l) 的有()
A. $(1, 4)$ B. $(6, 8)$ C. $(7, 12)$ D. $\left(3, \frac{1}{2}\right)$

三、填空题

8. (2020 梅河口五中月考)已知正实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = 2c^2$, 则 $\frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ 的最小值为_____.
9. (2020 江苏卷)已知 $5x^2y^2 + y^4 = 1 (x, y \in \mathbf{R})$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是_____.
10. (2021 江苏邗江中学模拟)中国宋代的数学家秦九韶曾提出“三斜求积术”, 即假设在平面内有一个三角形, 边长分别为 a, b, c , 三角形的面积 S 可由公式 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 求得, 其中 p 为三角形周长的一半, 这个公式也被称为海伦—秦九韶公式, 现有一个三角形的边长满足 $a + b = 6 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$, 则此三角形面积的最大值为_____ cm^2 .

11. (2021·渭南模拟)已知函数 $y=\log_a x (a>0, a\neq 1)$ 与函数 $y=b (b>0)$ 存在两个不同的交点, 两交点的横坐标分别为 $x_1, x_2 (x_1<x_2)$, 则 $2x_1+x_2$ 的最小值为_____.

12. 圆 M 的方程为 $(x-2-5\cos \theta)^2+(y-5\sin \theta)^2=1 (\theta\in\mathbf{R})$, 圆 C 的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$, 过圆 M 上任意一点 P 作圆 C 的两条切线 PE, PF , 切点分别为 E, F , 则 $\vec{PE}\cdot\vec{PF}$ 的最小值为_____.

四、解答题

13. 某单位在国家科研部门的支持下, 进行技术攻关, 采用了新工艺, 把二氧化碳转化为一种可利用的化工产品. 已知该单位每月的处理量最少为 400 吨, 最多为 600 吨, 月处理成本 y (元)与月处理量 x (吨)之间的函数关系可近似地表示为 $y=\frac{1}{2}x^2-200x+80\,000$, 且每处理一吨二氧化碳得到可利用的化工产品价值为 100 元.

(1)该单位每月处理量为多少吨时, 才能使每吨的平均处理成本最低?

(2)该单位每月能否获利? 如果获利, 求出最大利润; 如果不获利, 则需要国家至少补贴多少元才能使单位不亏损?

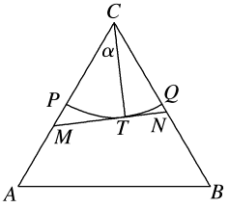
14. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0, b\in\mathbf{R}, c\in\mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$ 的最小值是 $f(-1)=0$, 且 $c=1$,

$F(x)=\begin{cases} f(x), & x>0, \\ -f(x), & x<0, \end{cases}$ 求 $F(2)+F(-2)$ 的值;

(2)若 $a=1, c=0$, 且 $|f(x)|\leq 1$ 在区间 $(0,1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

15.(2020 郑州模拟)如图，在某小区内有一形状为正三角形的草地，该正三角形的边长为 20 米，在 C 点处有一喷灌喷头，该喷头喷出的水的射程为 10 米，其喷射的水刚好能洒满以 C 为圆心，以 10 米为半径的圆，在 $\triangle ABC$ 内部的扇形 CPQ 区域内，现要在该三角形内修一个直线型步行道，该步行道的两个端点 M, N 分别在线段 CA, CB 上，并且与扇形的弧相切于 $\triangle ABC$ 内的 T 点，步道宽度忽略不计，设 $\angle MCT = \alpha$.



- (1)试用 α 表示该步行道 MN 的长度；
- (2)试求出该步行道 MN 的长度的最小值，并指出此时 α 的值.