

一、多选题

1. 关于 $(x + \frac{1}{x} - 1)(x - 1)^4$ 的展开式中下列结论正确的有()
- A. 不含 x^{-2} 项
B. x^3 项的系数为 6
C. 常数项为 -1
D. 各项的系数和为 0

二、填空题

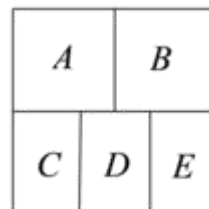
2. 《中国诗词大会》(第三季)亮点颇多,在“人生自有诗意”的主题下,十场比赛每场都有一首特别设计的开场诗词在声光舞美的配合下,百人团齐声朗诵,别有韵味,若《沁园春.长沙》、《蜀道难》、《敕勒歌》、《游子吟》、《关山月》、《清平乐.六盘山》排在后六场,且《蜀道难》排在《游子吟》的前面,《沁园春.长沙》与《清平乐.六盘山》不相邻且均不排在最后,则六场的排法有_____种. (用数字作答).

三、解答题

3. 如图,一个正方形花圃被分成 5 份.

(1)若给这 5 个部分种植花,要求相邻两部分种植不同颜色的花,已知现有红、黄、蓝、绿 4 种颜色不同的花,求有多少种不同的种植方法?

(2)若向这 5 个部分放入 7 个不同的盆栽,要求每个部分都有盆栽,问有多少种不同的放法?



1. 【答案】AD

【解析】解：因为 $(x-1)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = (-1)^r C_4^r x^{4-r}$ ，而 $(x + \frac{1}{x} - 1)(x-1)^4 = x \cdot (x-1)^4 + \frac{1}{x} \cdot (x-1)^4 - (x-1)^4$ ，它的展开式的通项为 $x \cdot (-1)^r C_4^r x^{4-r} + \frac{1}{x} \cdot (-1)^r C_4^r x^{4-r} - (-1)^r C_4^r x^{4-r}$ ，显然它的展开式的最小次数为 -1 次，不含 x^{-2} 项，故A选项正确；对于B： x^3 项的系数为： $(-1)^2 C_4^2 + (-1)^0 C_4^0 - (-1)^1 C_4^1 = 6 + 1 + 4 = 11$ ，故B选项错误；对于C：常数项为： $(-1)^3 C_4^3 - (-1)^4 C_4^4 = -4 - 1 = -5$ ，故C选项错误；对于D：令 $x = 1$ 得， $(x + \frac{1}{x} - 1)(x-1)^4 = 0$ ，故各项的系数和为0，故D选项正确。

2. 【答案】144

【解析】解：《沁园春·长沙》、《蜀道难》、《敕勒歌》、《游子吟》、《关山月》、《清平乐·六盘山》，分别记为A, B, C, D, E, F，由已知有B排在D的前面，A与F不相邻且不在最后。第一步：在B, C, D, E中选一个排在最后，共 $C_4^1 = 4$ (种)选法
第二步：将剩余五个节目按A与F不相邻排序，共 $A_5^5 - A_2^2 \cdot A_4^4 = 72$ (种)排法，
第三步：在前两步中B排在D的前面与后面机会相等，则B排在D的前面只需除以 $A_2^2 = 2$ 即可，即六场的排法有 $4 \times 72 \div 2 = 144$ (种)

3. 【答案】解：(1)先对A部分种植，有4种不同的种植方法；再对B部分种植，有3种不同的种植方法；对C部分种植进行分类：①若与B相同，D有2种不同的种植方法，E有2种不同的种植方法，共有 $4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 2 = 48$ 种；

②若与B不同，C有2种不同的种植方法，D有1种不同的种植方法，E有2种不同的种植方法，共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$ 种，

综上，共有96种植方法；

(2)将7个盆栽分成5组，有2种分法：

①若分成2、2、1、1、1的5组，有 $\frac{C_7^2 C_5^2}{A_2^2}$ 种分法；②若分成3、1、1、1、1的5组，有 C_7^3

种分法；将分好的5组全排列，对应5个部分，则一共有 $(\frac{C_7^2 C_5^2}{A_2^2} + C_7^3) \cdot A_5^5 = 16800$ 种放法。

一、多选题

1. 下列结论正确的是()
- A. 用 1, 2, 3, 4, 5 组成无重复数字的三位数, 其中奇数的个数为 36
- B. 从 4 名男生和 3 名女生中选 3 人参加某兴趣小组, 如果 3 人不全是女生, 则有 30 种选法
- C. 满足 $A \cup B = \{1, 2\}$ 的集合 A, B 共有 9 组
- D. 以正方体的顶点为顶点的三棱锥的个数为 64

二、填空题

2. 2022 年北京冬奥会吉祥物“冰墩墩”和冬残奥会吉祥物“雪容融”, 有着可爱的外表和丰富的寓意, 深受各国人民的喜爱. 某商店有 4 个不同造型的“冰墩墩”吉祥物和 3 个不同造型的“雪容融”吉祥物展示在柜台上, 要求“冰墩墩”和“雪容融”彼此间隔排列, 则不同的排列方法种数为_____. (用数字作答)

三、解答题

3. 已知 $(x + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式的所有二项式系数和为 256.

- (1) 求展开式的所有有理项的系数之和;
- (2) 求展开式的系数最大项.

午练(57) 参考答案

1. 【答案】AC

【解析】解：对A：奇数有3个，偶数有2个，最后一位为奇数即可，即 $C_3^1 \cdot A_4^2 = 36 \therefore A$ 对；

对B：分为三种情况，三人中没有女生，有一位女生或有两位女生，即

$$C_4^1 \cdot C_3^2 + C_4^2 \cdot C_3^1 + C_4^3 \cdot C_3^0 = 34 \therefore B \text{错}$$

对C：当A为空集时， $B = \{1,2\}$ ；当 $A = \{1\}$ 时， $B = \{2\}, \{1,2\}$ ；当 $A = \{2\}$ 时， $B = \{1\}, \{1,2\}$ ；

当 $A = \{1,2\}$ 时， $B = \text{空集}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ ，共9组. $\therefore C$ 对

对D：首先从8个顶点中选4个，再减去四点共面的情况：6个表面与6个对角面，

$$\text{即 } C_8^4 - 6 - 6 = 58 \therefore D \text{错}.$$

2 【答案】144

【解析】解：先排4个“冰墩墩”，中间有3个空，再排“雪容融”，共有 $A_4^4 \cdot A_3^3 = 144$.

3. 【答案】

解：(1)二项式系数和为 $2^n = 256, \therefore n = 8$ ，其展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} (2\sqrt[3]{x})^{-r} = 2^{-r} C_8^r x^{8-\frac{4}{3}r}$ ，($0 \leq r \leq 8, r \in N$)，当 $r = 0, 3, 6$ 时， $8 - \frac{4}{3}r$ 为有理数，即 T_1, T_4, T_7 为有理

项，当 $r = 0$ 时， $8 - \frac{4}{3}r = 8$ 为有理数，系数为 $2^{-r} C_8^r = 2^{-0} C_8^0 = 1$ ，

当 $r = 3$ 时， $8 - \frac{4}{3}r = 4$ 为有理数，系数为 $2^{-r} C_8^r = 2^{-3} C_8^3 = 7$ ，

当 $r = 6$ 时， $8 - \frac{4}{3}r = 0$ 为有理数，系数为 $2^{-r} C_8^r = 2^{-6} C_8^6 = \frac{7}{16}$ ，

$\therefore$ 展开式的所有有理项的系数之和为 $1 + 7 + \frac{7}{16} = \frac{135}{16}$ ；

(2)设 $(x + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中 T_{r+1} 为系数最大的项，则 $\begin{cases} C_8^r 2^{-r} \geq C_8^{r-1} 2^{-(r-1)} \\ C_8^r 2^{-r} \geq C_8^{r+1} 2^{-(r+1)} \end{cases}$ ，解得 $2 \leq r \leq 3$ ，

$\therefore r \in N, \therefore r = 2$ 或 3 ，所以第3项和第4项系数最大，

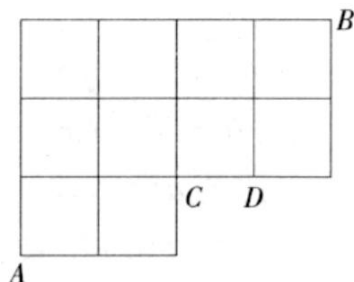
$$T_3 = C_8^2 2^{-2} x^{\frac{16}{3}} = 7x^{\frac{16}{3}}, T_4 = C_8^3 2^{-3} x^4 = 7x^4,$$

$\therefore$ 展开式的系数最大项为 $7x^{\frac{16}{3}}$ 和 $7x^4$.

一、多选题

1. 在某城市中, A, B 两地之间有如图所示的道路网, 甲随机沿路网选择一条最短路径, 从 A 地出发去往 B 地. 下列结论正确的有 ()

- A. 不同的路径共有 31 条
- B. 不同的路径共有 61 条
- C. 若甲途经 C 地, 则不同的路径共有 18 条
- D. 若甲途经 C 地, 且不经 D 地, 则不同的路径共有 9 条



二、填空题

2. 由数字 0、1、2、3 组成无重复数字且比 300 大的数有 _____ 个.

三、解答题

3. 已知 $f(x) = (1+x)^m + (1+2x)^n (m, n \in \mathbb{N}^*)$ 的展开式中 x 的系数为 11.

(1) 求 x^2 的系数取最小值时 n 的值;

(2) 当 x^2 的系数取得最小值时, 求 $f(x)$ 展开式中 x 的偶次幂项的系数之和.

午练(58) 参考答案

1. 【答案】DAC

【解析】解：由图可知，从A地出发去往B地的最短路径共包含7步，其中3步向上，4步向右，且前3步中，至少有1步向上，则不同的路径共有 $C_3^1 C_4^2 + C_3^2 C_4^1 + C_3^3 = 31$ 条. 若甲途经C地，则不同的路径共有 $C_3^1 C_4^2 = 18$ 条. 若甲途经C地，且不经过D地，则不同的路径共有 $C_3^1 C_3^1 = 9$ 条.

2. 【答案】24

【解析】解：分两种情况考虑，

①若组成的数为3位数，满足无重复数字且比300大的数有 $C_3^2 A_2^2 = 6$ 个，

④若组成的数为4位数，满足无重复数字且比300大的数有 $C_3^1 A_3^3 = 18$ 个，

故由数字0、1、2、3组成无重复数字且比300大的数，共有 $6 + 18 = 24$ 个.

故答案为：24.

3. 【答案】解：(1)由已知得 $C_m^1 + 2C_n^1 = 11$, $\therefore m + 2n = 11$,

$$x^2 \text{的系数为 } C_m^2 + C_n^2 2^2 = \frac{m(m-1)}{2} + 2n(n-1) = \frac{m^2-m}{2} + (11-m)\left(\frac{11-m}{2} - 1\right)$$

$$= \left(m - \frac{21}{4}\right)^2 + \frac{351}{16}, \therefore m \in N^*, m = 5 \text{ 时, } x^2 \text{的系数取得最小值 } 22, \text{ 此时 } n = 3;$$

(2)由(1)知，当 x^2 的系数取得最小值时， $m = 5$, $n = 3$,

$$\therefore f(x) = (1+x)^5 + (1+2x)^3,$$

设这时 $f(x)$ 的展开式为 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_5 x^5$,

$$\text{令 } x = 1, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2^5 + 3^3 = 59,$$

$$\text{令 } x = -1, a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = -1,$$

$$\text{两式相加得 } 2(a_0 + a_2 + a_4) = 58,$$

故展开式中 x 的偶次幂项的系数之和为 29.