

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

第二章 第 3 讲 单调性与最大(小)值

研制人: 张顺军

审核人: 鲁媛媛

班级: _____ 姓名: _____

学号: _____

授课日期: 2022.5.19

【本课在课程标准中的表述】

- ①借助函数图象, 会用数学符号语言表达函数的单调性、最值, 理解实际意义
- ②会求具体函数的单调区间.
- ③会运用基本初等函数的图象分析函数的性质.

【课前热身】

1. 判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. ()

(2) 若函数 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(0) = 0$. ()

(3) 若 $y = f(x)$ 在区间 D 上单调递增, 则函数 $y = kf(x) (k < 0)$, $y = \frac{1}{f(x)}$ 在区间 D 上单调递减. ()

(4) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(4-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称. ()

2. 下列函数为奇函数且在定义域内为增函数的是()

A. $f(x) = x - 1$

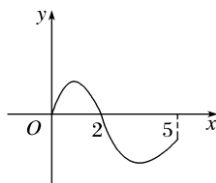
B. $f(x) = x^2 + x$

C. $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

D. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

3. 函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 在区间 $[2, 3]$ 上的最大值是_____.

4. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$, 若当 $x \in [0, 5]$ 时, $f(x)$ 的图象如图所示, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为_____.



5. 函数 $f(x) = (x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 是_____函数. (填“奇”“偶”或“非奇非偶”)

6. 函数 $y = f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的减函数, 且 $f(a+1) < f(2a)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【知识梳理】

【典例探究】

考点一 确定函数的单调性

例 1 (1) (多选) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 则下列结论中不正确的是()

A. $y = \frac{1}{f(x)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数

B. $y = |f(x)|$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数

C. $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数

D. $y = 2^{-f(x)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数

(2) 试讨论函数 $f(x) = \frac{ax}{x-1} (a \neq 0)$ 在 $(-1, 1)$ 上的单调性.

(3) 求下列函数的单调区间.

① $f(x) = -x^2 + 2|x| + 3$; ② $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x + 5)$; ③ $f(x) = x - \ln x$.

考点二 函数单调性的应用

例 2 (1) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2}$, 若 $a = f(2^{1.3})$, $b = f(4^{0.7})$, $c = f(\log_3 8)$, 则 a, b, c 的大小关系为()

A. $c < a < b$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $a < b < c$

(2) 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则()

A. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}})$ B. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f(2^{-\frac{3}{2}})$

C. $f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$ D. $f(2^{-\frac{2}{3}}) > f(2^{-\frac{3}{2}}) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$

(3) 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$, 则()

A. $a > 2b$ B. $a < 2b$ C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

例 3 (1) 已知函数 $f(x) = \ln x + 2^x$, 若 $f(x^2 - 4) < 2$, 则实数 x 的取值范围是_____.

(2) 如果函数 $f(x) = \begin{cases} 2-a & x < 1, \\ a^x, & x \geq 1 \end{cases}$ 满足对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立,

那么实数 a 的取值范围是()

A. $(0, 2)$ B. $(1, 2)$ C. $(1, +\infty)$ D. $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$

考点三 函数的最值

例 4 (1) 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - \log_2(x+2)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值为_____

(2) 函数 $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2 + 5}$ 的最大值为_____.

(3) 对于任意实数 a, b , 定义 $\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b. \end{cases}$ 设函数 $f(x) = -x + 3$, $g(x) = \log_2 x$, 则函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 的最大值是_____.

【课堂小结】

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科作业

第二章 第3讲 单调性与最大(小)值

研制人: 张顺军 审核人: 鲁媛媛

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____ 完成日期: 2022.5.19 (时长: 60min)

一、单选题

1. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是()

A. $y=\ln(x+2)$ B. $y=-\sqrt{x+1}$

C. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ D. $y=x+\frac{1}{x}$

2. 设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 则()

A. $f(a^2+a+2) > f\left(\frac{7}{4}\right)$ B. $f(a^2+a+2) < f\left(\frac{7}{4}\right)$

C. $f(a^2+a+2) \geq f\left(\frac{7}{4}\right)$ D. $f(a^2+a+2) \leq f\left(\frac{7}{4}\right)$

3. 函数 $f(x)=\frac{x}{1-x}$ 在()

A. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 上是增函数

B. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 上是减函数

C. $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是增函数

D. $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是减函数

4. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $[0, +\infty)$ 上的减函数, 且 $f(2)=-1$, 则满足 $f(2x-4) > -1$ 的实数 x 的取值范围是()

A. $(3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$

C. $[2, 3)$ D. $[0, 3)$

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1, & x \leq 0, \\ -x^3, & x > 0, \end{cases}$ 当 $x \in [m, m+1]$ 时, 不等式 $f(2m-x) < f(x+m)$ 恒成立, 则实数 m 的

取值范围是()

A. $(-\infty, -4)$ B. $(-\infty, -2)$

C. $(-2, 2)$ D. $(-\infty, 0)$

★6. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 对任意 x_1, x_2 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > -1$, 则下列说法正确的是()

A. $y=f(x)+x$ 是增函数 B. $y=f(x)+x$ 是减函数

C. $y=f(x)$ 是增函数 D. $y=f(x)$ 是减函数

二、多选题

7. 若 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=\frac{a}{x+1}$ 在区间 $[1, 2]$ 上都单调递减, 则实数 a 的取值可以是()

A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x + 2^x, & x > 0, \\ \frac{2}{1-x}, & x \leq 0, \end{cases}$ 则下列结论正确的是()

- A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数 B. $f(e) > f(2)$
 C. 若 $f(x)$ 在 $(a, a+1)$ 上单调递增, 则 $a \leq -1$ 或 $a \geq 0$
 D. 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[1, 2]$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x + 2^x, & x > 0, \\ \frac{2}{1-x}, & x \leq 0, \end{cases}$ 则下列结论正确的是()

- A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数 B. $f(e) > f(2)$
 C. 若 $f(x)$ 在 $(a, a+1)$ 上单调递增, 则 $a \leq -1$ 或 $a \geq 0$
 D. 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[1, 2]$

三、填空题

10. 函数 $y = -x^2 + 2|x| + 1$ 的单调递增区间为_____, 单调递减区间为_____.

11. 设函数 $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ 在区间 $[3, 4]$ 上的最大值和最小值分别为 M, m , 则 $\frac{m^2}{M} =$ _____.

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 4, \\ \log_2 x, & x > 4. \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a, a+1)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是_____.

★13. 设函数 $f(x) = \frac{ax+1}{x+2a}$ 在区间 $(-2, +\infty)$ 上是增函数, 那么 a 的取值范围是_____.

四、解答题

14. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{ax} + \frac{2}{a}$ ($a > 0$), 且 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最大值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的最小值.

15. 已知函数 $f(x) = a - \frac{2}{2^x + 1}$.

(1) 求 $f(0)$;

(2) 探究 $f(x)$ 的单调性, 并证明你的结论;

(3) 若 $f(x)$ 为奇函数, 求满足 $f(ax) < f(2)$ 的 x 的取值范围.