

江苏省仪征中学、江苏省江都中学

2021—2022 学年度高二第二学期阶段联合测试（数学）试卷

命题单位：江苏省江都中学

命题人：陈泽民

审核人：葛宜春

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1、全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | 2x^2 + x - 1 \geq 0\}$ ， $B = \{x | y = \sqrt{3x-1}\}$ ，则 $(\complement_U A) \cap B =$

(D)

A. $(2, +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{1}{3}, 2\right)$ D. $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

2、已知随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$ ，且 $P(X < 4) = 0.8$ ，则 $P(X < 0) =$ (A)

A. 0.2

B. 0.4

C. 0.3

D. 0.6

3、“ $a < 11$ ”是“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + a < 0$ ”的 (B)

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4、设随机变量 X, Y 满足： $Y = 4X + 3$ ， $X \sim B(8, 25\%)$ ，则 $D(Y) =$ (C)

A. 6

B. 27

C. 24

D. 9

5、已知正实数 x, y 满足 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ ，则 $4xy - 3x - 6y$ 的最小值为 (C)

A. 2

B. 4

C. 8

D. 12

6、10 张奖券中有 4 张“中奖”奖券，甲乙两人先后参加抽奖活动，每人从中不放回抽取一张奖券，甲先抽，乙后抽，在甲中奖条件下，乙没有中奖的概率为 (B)

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{15}$

7、已知 m, n 为正实数，且 $\sqrt{m} + \sqrt{n} = 1$ ，则下列不等式一定成立的是 (D)

A. $m^n \geq n^m$

B. $m^n < n^m$

C. $m^m + n^n < \frac{1}{2}$

D. $m^m + n^n > \frac{1}{2}$

8、已知函数 $f(x) = mx$ ， $g(x) = 3 \ln x + 2e \left(\frac{1}{e} \leq x \leq e^3 \right)$ ，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像

上分别存在点 M, N ，使得 M, N 关于直线 $y = e$ 对称，则实数 m 的取值范围是 (D)

A. $\left[-\frac{9}{e^2}, +\infty\right)$ B. $\left[-\frac{3}{e}, -\frac{9}{e^2}\right]$ C. $\left[-\frac{9}{e^2}, 3e\right]$ D. $\left[-\frac{3}{e}, 3e\right]$

二、多项选择题：本题共 4 小题。每小题 5 分。共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

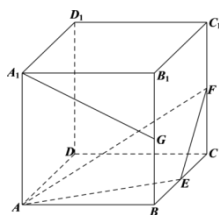
9、一袋中有大小相同的 4 个红球和 2 个白球，则下列结论正确的 (ABD)

- A. 从中任取 3 球，恰有一个白球的概率是 $\frac{3}{5}$
- B. 从中有放回的取球 6 次，每次任取一球，则取到红球次数的方差为 $\frac{4}{3}$
- C. 现从中有放回的取球 2 次，每次任取 1 球，则在第一次取到红球后，第二次再次取到红球的概率为 $\frac{2}{5}$
- D. 从中有放回的取球 3 次，每次任取一球，则至少有一次取到红球的概率为 $\frac{26}{27}$

10、下列命题中，正确的命题是 (BCD)

- A. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$ ，若 $E(X) = 30, D(X) = 20$ ，则 $p = \frac{2}{3}$
- B. 若回归直线的斜率估计值为 0.25，样本点中心为 (2, 3)，则回归直线的方程为 $y = 0.25x + 2.5$
- C. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0, 1)$ ，若 $P(\xi > 1) = p$ ，则 $P(-1 < \xi < 0) = \frac{1}{2} - p$
- D. 某人在 10 次射击中，击中目标的次数为 X ， $X \sim B(10, 0.8)$ ，则当 $X = 8$ 时概率最大。

11、如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 、 F 、 G 分别为 BC 、 CC_1 、 BB_1 的中点，则 (BC)



- A. $D_1D \perp AF$
- B. $A_1G \parallel$ 平面 AEF
- C. $\overrightarrow{A_1C} \cdot (\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_1A}) = 0$
- D. 向量 $\overrightarrow{A_1B}$ 与向量 $\overrightarrow{AD_1}$ 的夹角是 60°

12、已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ，满足 $e^a + e^b = 1$ ，则下列正确的是 (ABD)

- A. $a + b \leq -2 \ln 2$
- B. $e^a + b < 0$
- C. $ab \geq 1$
- D. $2(e^{2a} + e^{2b}) \geq 1$

三、填空题：本题共 4 小题。每小题 5 分，共 20 分。

13、已知 $(x^2 - \frac{a}{x})^6$ 的展开式中 x^3 的系数是 160，则 $a = \underline{\quad -2 \quad}$

14、某社区对在抗击疫情工作中表现突出的 3 位医生、2 位护士和 1 位社区工作人员进行表彰并合影留念。现将这 6 人随机排成一排，则 3 位医生中有且只有 2 位相邻的概率

为_____· $\frac{3}{5}$

15、点 $A(2,1,1)$ 是直线 l 上一点， $\vec{a} = (1,0,0)$ 是直线 l 的一个方向向量，则点 $P(1,2,0)$ 到直线 l 的距离是_____· $\sqrt{2}$

16、已知不等式 $axe^2 - x - 1 < 0$ 的解集中有且仅有一个负整数，则实数 a 的取值范围是_ $(0, \frac{1}{2e^2}]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17、如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，其中 $\angle BAD = 90^\circ$, $AD \parallel BC$,

$AD=3$, $AB=BC=2$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA=3$. 点

M 在棱 PD 上, 且 $DM=2MP$, 点 N 为 BC 中点.

(1) 证明：直线 $MN \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 求二面角 $C-PD-N$ 的正弦值.

解：(1) 证明：如图，以 A 为原点，分别以 $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AP}$

方向为 x, y, z 轴方向建立空间直角坐标系，由题意，

可得 $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 2, 0)$,

$D(0, 3, 0)$, $P(0, 0, 3)$, $M(0, 1, 2)$, $N(2, 1, 0)$.

显然， $\vec{AD} = (0, 3, 0)$ 是平面 ABP 的一个法向量， $\vec{MN} = (2, 0, -2)$,

故 $\vec{MN} \cdot \vec{AD} = 0$, 即 $MN \perp AD$,

又因为 $MN \not\subset$ 平面 PAB , 故直线 $MN \parallel$ 平面 PAB .

(2) 设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

又 $\vec{DC} = (2, -1, 0)$,

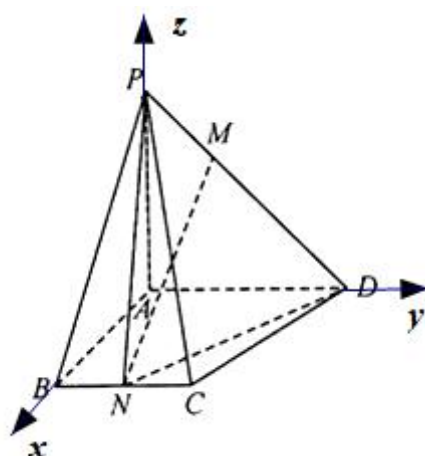
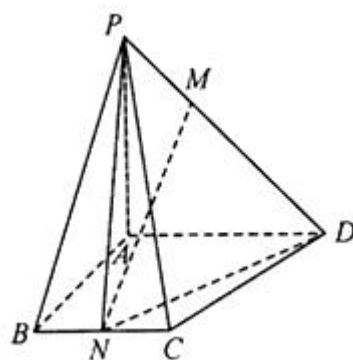
由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{DP} = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ -3y + 3z = 0, \end{cases}$ 取 $z=2$, 可

得 $\vec{n} = (1, 2, 2)$.

由已知，可得 $\vec{ND} = (-2, 2, 3)$.

设平面 PDN 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, 有 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{ND} = -2x + 2y = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{DP} = -3y + 3z = 0 \end{cases}$,

取 $z=1$, 可得 $\vec{m} = (1, 1, 1)$.



$$\text{所以, } |\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{|1+2+2|}{3 \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{因此 } \sin\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$\text{所以二面角 } C - PD - N \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

18、已知在 $(1+2x)^n$ 的展开式中，第 3 项的二项式系数与第 2 项的二项式系数的比为 5: 2.

(1)求 n 的值; (2)求含 x^2 的项的系数;

(3)求 $(1+2x)^n \times (1+x)^6$ 展开式中含 x^2 的项的系数.

$$(1) \because C_n^2 : C_n^1 = 5 : 2, \therefore n = 6.$$

$$(2) \text{ 设 } (1+2x)^n \text{ 的展开式的通项为 } T_{r+1}, \text{ 则 } T_{r+1} = C_6^r \cdot 2^r \cdot x^r, \text{ 令 } r = 2.$$

$$\therefore \text{ 含 } x^2 \text{ 的项的系数为 } C_6^2 \cdot 2^2 = 60;$$

$$(3) \text{ 由 (1) 知: } (1+2x)^n \times (1+x)^6 = (1+2x)^6 \times (1+x)^6$$

$$\text{展开式中含 } x^2 \text{ 项的系数为: } C_6^2 \times 2^2 \times C_6^0 \times 1 + C_6^1 \times 2^1 \times C_6^1 \times 1 + C_6^0 \times 2^0 \times C_6^2 \times 1 = 147$$

所以展开式中含 x^2 项的系数为 147

19、为实施乡村振兴，科技兴农，某村建起了田园综合体，并从省城请来专家进行技术指导. 根据统计，该田园综合体西红柿亩产量的增加量 y （千克）与某种液体肥料每亩使用量 x （千克）之间的对应数据如下.

x （千克）	2	4	5	6	8
y （千克）	300	400	400	400	500

- (1) 由上表数据可知，可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，请计算相关系数 r 并加以说明（若 $|r| > 0.75$ ，则线性相关程度很高，可用线性回归模型拟合）；
- (2) 求 r 关于 x 的回归方程，并预测当液体肥料每亩使用量为 15 千克时，西红柿亩产量的增加量约为多少千克？

附：相关系数公式 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ ，参考数据： $\sqrt{10} \approx 3.16$.

回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

解：(1) 由已知数据可得 $\bar{x} = \frac{2+4+5+6+8}{5} = 5$ ，

$\bar{y} = \frac{300+400+400+400+500}{5} = 400$ ，

所以 $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-3) \times (-100) + (-1) \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 0 + 3 \times 100 = 600$ ，

$\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2} = 2\sqrt{5}$ ，

$\sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{(-100)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}$ ，

所以相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{600}{2\sqrt{5} \times 100\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0.95$.

因为 $r > 0.75$ ，所以可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.

$$(2) \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{600}{20} = 30, \quad \hat{a} = 400 - 5 \times 30 = 250,$$

所以回归方程为 $\hat{y} = 30x + 250$.

当 $x = 15$ 时, $\hat{y} = 30 \times 15 + 250 = 700$,

即当液体肥料每亩使用量为 15 千克时, 西红柿由产量的增加量约为 700 千克.

20、接种新冠疫苗, 可以有效降低感染新冠肺炎的几率, 某地区有 A, B, C 三种新冠疫苗可供居民接种, 假设在某个时间段该地区集中接种第一针疫苗, 而且这三种疫苗的供应都很充足. 为了节省时间和维持良好的接种秩序, 接种点设置了号码机, 号码机可以随机地产生 A, B, C 三种号码 (产生每个号码的可能性都相等), 前去接种第一针疫苗的居民先从号码机上取一张号码, 然后去接种与号码相对应的疫苗 (例如: 取到号码 A , 就接种 A 种疫苗, 以此类推). 若甲, 乙, 丙, 丁四个人各自独立的去接种第一针新冠疫苗.

(1) 求这四个人中恰有 2 个人接种 A 种疫苗的概率;

(2) 记甲, 乙, 丙, 丁四个人中接种疫苗的种数为 X , 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

解: (1) 依题意所有可能的接种方式有 3^4 种, 恰有 2 人接种 A 疫苗的情况有 $C_4^2 \cdot 2^2$ 种,

从而恰有 2 人接种 A 种疫苗的概率为 $\frac{C_4^2 \cdot 2^2}{3^4} = \frac{8}{27}$.

(2) 依题意 X 的可能值为 1, 2, 3,

$$\text{又 } P(X=1) = \frac{3}{3^4} = \frac{1}{27}, \quad P(X=2) = \frac{C_3^2 (C_2^1 C_4^3 + C_4^2 C_2^2)}{3^4} = \frac{14}{27} \quad (\text{或}$$

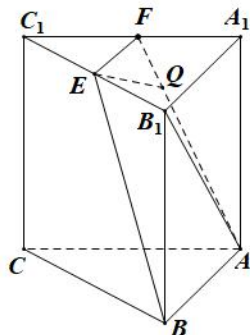
$$P(X=2) = \frac{C_3^2 (2^4 - 2)}{3^4} = \frac{14}{27}), \quad P(X=3) = \frac{C_3^1 C_4^2 C_2^1}{3^4} = \frac{4}{9} \quad (\text{或 } P(X=3) = \frac{C_4^2 A_3^3}{3^4} = \frac{4}{9}).$$

综上知, X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{14}{27}$	$\frac{4}{9}$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{1}{27} + 2 \times \frac{14}{27} + 3 \times \frac{4}{9} = \frac{65}{27}.$$

21、光学器件在制作的过程中往往需要进行切割，现生产一种光学器件，有一道工序为将原材料切割为两个部分，然后在截面上涂抹一种光触媒化学试剂，加入纳米纤维导管后粘合.在如图所示的原材料器件直三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 中， $AB \perp AC$ ， $AB=AC=AA'=a$ ，现经过 AB 作与底面 ABC 所成角为 θ 的截面，且截面与 $B'C'$ ， $A'C'$ 分别交于不同的两点 E ， F 。

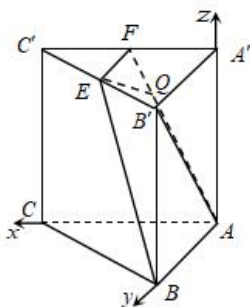


(1) 求证：EF // 平面 ABC；

(2) 当 E 和 F 分别为 $B'C'$ 和 $A'C'$ 的中点时，需要在线段 AF 上寻找一个点 Q ，用纳米纤维导管连接 EQ ，使得 EQ 与 AB' 所在直线的夹角最小，试求出纤维导管 EQ 的长。

【解析】(1) 略

(2) 以 A 为坐标原点，直线 AC 、 AB 、 AA' 分别为 x ， y ， z 轴，建立如图空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$ ， $A'(0,0,a)$ ， $B'(0,a,a)$ ， $C'(a,0,a)$ ，

而 E 和 F 分别为 $B'C'$ 和 $A'C'$ 的中点，

故 $E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a\right)$ ， $F\left(\frac{a}{2}, 0, a\right)$ ， $\overrightarrow{AB'} = (0, a, a)$ 。

设 $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AF}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)， $Q(x, y, z)$ ，

则 $(x, y, z) = \lambda \cdot \left(\frac{a}{2}, 0, a\right)$, 则 $Q\left(\frac{\lambda a}{2}, 0, \lambda a\right)$,

所以 $\overrightarrow{QE} = \left(\frac{a}{2} - \frac{\lambda a}{2}, \frac{a}{2}, a - \lambda a\right)$. 设 EQ 与 $\overline{AB'}$ 的夹角为 α ,

$$\begin{aligned}\text{则 } \cos \alpha &= \left| \cos \langle \overline{AB'}, \overrightarrow{QE} \rangle \right| = \frac{|\overline{AB'} \cdot \overrightarrow{QE}|}{|\overline{AB'}| \cdot |\overrightarrow{QE}|} = \frac{\left| \frac{3}{2}a^2 - \lambda a^2 \right|}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 (1-\lambda)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (1-\lambda)^2 a^2}} \\ &= \frac{\frac{3}{2} - \lambda}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}(1-\lambda)^2 + \frac{1}{4} + (1-\lambda)^2}} = \frac{\frac{3}{2} - \lambda}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{3}{2}}}, \text{ 设 } \frac{3}{2} - \lambda = t, \text{ 则 } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\end{aligned}$$

$$\text{则 } \cos^2 \alpha = \frac{t^2}{\frac{5}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{9}{8}} = \frac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{1}{t} - \frac{10}{9}\right)^2 + \frac{10}{9}} \leq \frac{9}{10},$$

当且仅当 $t = \frac{9}{10}$ 时, 即 $\lambda = \frac{3}{5}$ 时, $\cos \alpha$ 取得最大值, 为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

因为余弦函数 $y = \cos \alpha$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

所以当 $\lambda = \frac{3}{5}$ 时直线 EQ 与 AB' 的夹角最小, 此时, $\overrightarrow{QE} = \left(\frac{a}{5}, \frac{a}{2}, \frac{2a}{5}\right)$,

$$\text{所以 } |\overrightarrow{QE}| = \sqrt{\left(\frac{a}{5}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}a}{10},$$

所以纤维导管 EQ 的长为 $\frac{3\sqrt{5}a}{10}$.

22、已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{\lambda - 2x}{x+1}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $\lambda = 2$ 时, 求证: $f(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立;

(3) 求证: 当 $x > 0$ 时, $(e^x - 1)\ln(x+1) > x^2$.

解：(1) 法 1：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\lambda+2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x(x+1)^2}$

$$g(x) = x^2 - \lambda x + 1, \quad \Delta = \lambda^2 - 4$$

当 $\lambda < -2$ 时， $g(x) > 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 成立，故 $f'(x) > 0$ ，即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增；

当 $-2 \leq \lambda \leq 2$ 时， $\Delta \leq 0$ ， $g(x) \geq 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 成立，故 $f'(x) \geq 0$ ， $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增；

当 $\lambda > 2$ 时， $\Delta > 0$ ，设两根为 $x_1 < x_2$ ，则 $x_1 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} > 0$ ， $x_2 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} > 0$

当 $0 < x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时， $g(x) > 0$ ， $f'(x) > 0$ ，当 $x_1 < x < x_2$ 时， $g(x) < 0$ ， $f'(x) < 0$ ，

故 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 单减，在 $(0, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 单增。

综上：当 $\lambda \leq 2$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数；

当 $\lambda > 2$ 时， $f(x)$ 在 $\left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)$ 单减，在 $\left(0, \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$

单增。

法 2：

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\lambda+2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{x + \frac{1}{x} - \lambda}{(x+1)^2}$

$$\because x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

当 $\lambda \leq 2$ 时， $f'(x) \geq 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数；

当 $\lambda > 2$ 时， $f'(x) < 0$ ，解得 $\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} < x < \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$ ，

$f'(x) > 0$ ，解得 $0 < x < \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$ 或 $x > \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$ 。

$\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)$ 单减，在 $\left(0, \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 单增。

(2) 当 $\lambda = 2$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增，故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单增，

所以 $f(x) > f(1) = 0$. 所以 $f(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立;

(3) 法 1: 由 (2) 知, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 即 $\ln x > \frac{2x-2}{x+1}$, 当 $x > 0$ 时, $\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2}$.

要证 $(e^x - 1)\ln(x+1) > x^2$, 只需证 $(e^x - 1)\frac{2x}{x+2} > x^2$, 只需证 $e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

令 $h(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 (x > 0)$, $h'(x) = e^x - x - 1$,

$h''(x) = e^x - 1 > 0$, $h'(x) > h'(0) = 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增, $h(x) > h(0) = 0$ 即 $e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

法 2:

要证 $(e^x - 1)\ln(x+1) > x^2$, 只需证 $\frac{\ln(x+1)}{x} > \frac{x}{e^x - 1}$, 只需证 $\frac{\ln(x+1)}{x} > \frac{\ln[(e^x - 1) + 1]}{e^x - 1}$.

设 $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, 只需证 $g(x) > g(e^x - 1)$.

则 $g'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2}$

令 $t(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$, 则 $t'(x) = -\ln(x+1) < 0$, $t(x) < t(0) = 0$,

$g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单减. 故只需证 $x < e^x - 1$ 即可.

$k(x) = e^x - x - 1$, $k'(x) = e^x - 1 > 0$, $k(x) > k(0) = 0$.

所以原不等式成立.