

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度高二数学第二学期周练 6 试卷

测试范围：圆锥曲线、导数、空间向量、计数原理、概率

命题人：童旗军 审题人：鲁媛媛 时间：2022 年 4 月 9 日

一. 单项选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知直线 l 的方向向量为 $\vec{m} = (x, -1, 2)$ ，平面 α 的法向量为 $\vec{n} = (1, 2, -4)$ ，若直线 l 与平面 α 平行，则实数 x 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -10 C. $\frac{1}{2}$ D. 10

2. 若 $A_n^2 = 3C_{n-1}^2$ ，则 n 的值为 ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

3. 函数 $f(x) = kx - \ln x$ 在 $[1, e]$ 上单调递增，则 k 的取值范围是 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $(1, +\infty)$

4. 随机变量 X 的分布列如下表，若 $E(3X + 3) = 6$ ，则 $D(X) =$ ()

X	-2	1	2
P	a	b	$\frac{1}{2}$

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

5. 抛掷红、黄两颗骰子，当红色骰子的点数为 4 或 6 时，两颗骰子的点数之积大于 20 的概率是 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

6. 已知二项式 $(ax - \frac{1}{x})^5$ 的展开式中含 x 的项的系数为 270，则实数 $a =$ ()

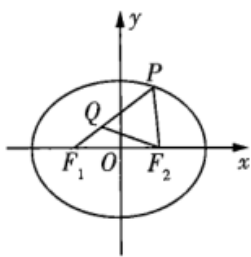
- A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

7. 已知 a, b 为正数， $\ln\left(\frac{b}{3a}\right) > 8^a - 2^b$ ，则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $3a < b$ B. $b < 3a$ C. $a^3 < b$ D. $b < a^3$

8. 如图， F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点， P 为椭圆 C 上的点， Q 是线段 PF_1

上靠近 F_1 的三等分点， $\triangle PQF_2$ 为正三角形，则椭圆 C 的离心率为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{5}$

二. 多项选择题: 本大题共4个小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得5分, 选对但不全的得2分, 有选错的得0分.

9. 关于排列组合数, 下列结论正确的是 ()

- A. $A_n^m = mA_{n-1}^{m-1}$ B. $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$
C. $C_n^m = \frac{A_n^m}{n!}$ D. $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$

10. 从6名男生和4名女生中选出4人去参加一项创新大赛, 则下列说法正确的有 ()

- A. 如果4人全部为男生, 那么有30种不同的选法
B. 如果4人中男生女生各有2人, 那么有30种不同的选法
C. 如果男生中的甲和女生中的乙必须在内, 那么有28种不同的选法
D. 如果男生中的甲和女生中的乙至少要有1人在内, 那么有140种不同的选法

11. 关于二项式 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式, 下列选项正确的有 ()

- A. 总共有6项 B. 存在常数项 C. x^2 项的系数是40 D. 各项的系数之和为243

12. 已知抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 且 $A(2, 1)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ 在抛物线上, O 为坐标原点. 下列说法正确的是 ()

- A. 点 F 的坐标为 $(0, 2)$ B. 若 $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AF}$, 则 $|\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| = 2|\overrightarrow{AF}|$
C. 若 $|\overrightarrow{BC}| = 6$, 则 BC 的中点到 x 轴距离最小值为2
D. 若直线 BC 过点 F , 则直线 OB 与 OC 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$

三. 填空题: 本大题共4个小题, 每小题5分, 共20分.

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点到一条渐近线的距离为 $2a$, 则其离心率的值为_____.

14. 点 $A(1, 2, 1)$, $B(3, 3, 2)$, $C(\lambda + 1, 4, 3)$, 若 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角, 则 λ 的取值范围为_____.

15. 已知直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长相等, $\angle ABC = 60^\circ$, 则直线 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的余弦值等于_____.

16. 为庆祝中国共产党成立 100 周年, 某校以班级为单位组织开展“走进革命老区, 学习党史文化”研学游活动. 该校高一年级部 10 个班级分别去 3 个革命老区开展研学游, 每个班级只去 1 个革命老区, 每个革命老区至少安排 3 个班级, 则不同的安排方法共有_____种 (用数字作答).

四. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 有 3 名男生、4 名女生, 在下列不同条件下, 求不同的排列方法总数.

(1) 全体站成一排, 甲不站排头也不站排尾;

(2) 全体站成一排, 女生必须站在一起;

(3) 全体站成一排, 男生互不相邻.

18. 已知 $f(x) = (1+2x)^n$ 展开式的二项式系数和为 128, 且

$$(1+2x)^n = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_n(x+1)^n$$

(1) 求 a_2 的值;

(2) 求 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 的值;

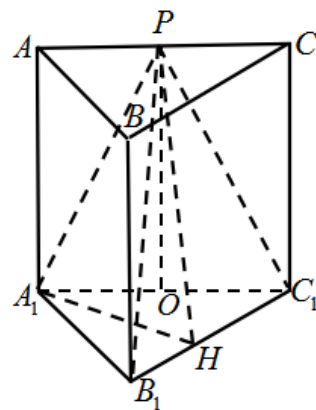
(3) 求 $f(20) - 20$ 被 6 整除的余数.

19. 经调查统计, 网民在网上光顾某淘宝小店, 经过一番浏览后, 对该店铺中的 A, B, C 三种商品有购买意向. 该淘宝小店推出买一种送 3 元优惠券的活动. 已知某网民购买 A, B, C 商品的概率分别为 $\frac{2}{3}, p_1, p_2 (p_1 < p_2)$, 至少购买一种的概率为 $\frac{8}{9}$, 最多购买两种的概率为 $\frac{8}{9}$. 假设该网民是否购买这三种商品相互独立.

(1) 求该网民分别购买 B, C 两种商品的概率;

(2) 用随机变量 X 表示该网民购买商品所享受的优惠券钱数, 求 X 的分布列和数学期望.

20. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, P 、 O 分别为 AC 、 A_1C_1 的中点, $PA_1 = PC_1 = 2\sqrt{2}$, $A_1B_1 = B_1C_1 = PB_1 = 2\sqrt{3}$, $A_1C_1 = 4$.



- (1) 求证: $PO \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$;
- (2) 求二面角 $B_1-PA_1-C_1$ 的余弦值.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且点 $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 过点 $P(1, 0)$ 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, 试探究直线 $y = x$ 上是否存在定点 Q , 使得 $k_{QA} + k_{QB}$ 为定值 λ . 若存在, 求出定点 Q 的坐标及实数 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = e^x (\ln x - a)$.

- (1) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $a > 1$, 求证: 函数 $f(x)$ 存在极小值;
- (3) 若对任意的实数 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) \geq -1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.