

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学周三练试卷 4

2022 年 4 月 6 日

一. 单选题

1. 已知向量 $\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (x, y, -4)$, 且 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $x + y =$ ()
- A. 4 B. 8 C. -4 D. -8
2. 已知离散型随机变量 X 的分布列服从两点分布, 且 $P(X = 0) = 3 - 4P(X = 1) = a$, 则 $a =$ ()
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
3. 有 10 件产品, 其中 3 件是次品, 从中一次任取两件, 若 X 表示取得次品的个数, 则 $P(x < 2)$ 等于 ()
- A. $\frac{7}{15}$ B. $\frac{14}{15}$ C. $\frac{8}{15}$ D. 1
4. $(x - \sqrt{2}y)^{10}$ 的展开式中 $x^6 y^4$ 的系数是 ()
- A. -840 B. 840 C. 210 D. -210
5. 现有语文、数学、英语、物理、化学、生物各 1 本书, 把这 6 本书分别放入 3 个不同的抽屉里, 要求每个抽屉至少放一本书且语文和数学放在同一个抽屉里, 则不同的放法总数为 ()
- A. 78 B. 126 C. 148 D. 150
6. 若 $(1-x)^8 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_8(1+x)^8$, 则 $a_6 =$ ()
- A. -448 B. -112 C. 112 D. 448

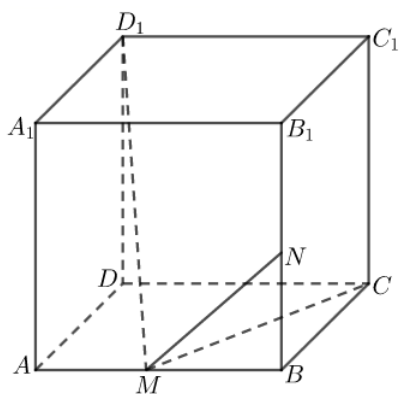
二. 多选题

7. 从 6 名男生和 4 名女生中选出 4 人去参加一项创新大赛，则下列说法正确的有 ()

- A. 如果 4 人全部为男生，那么有 30 种不同的选法
- B. 如果 4 人中男生女生各有 2 人，那么有 30 种不同的选法
- C. 如果男生中的甲和女生中的乙必须在内，那么有 28 种不同的选法
- D. 如果男生中的甲和女生中的乙至少要有 1 人在内，那么有 140 种不同的选法

8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = 3$ ，点 M ， N 分别在棱 AB 和 BB_1 上运动（不含端点），

若 $D_1M \perp MN$ ，下列命题正确的是 ()



- A. $MN \perp A_1M$
- B. $MN \perp$ 平面 D_1MC
- C. 线段 BN 长度的最大值为 $\frac{3}{4}$
- D. 三棱锥 $C_1-A_1D_1M$ 体积不变

三. 填空题

9. 19^{19} 除以 5 的余数为_____.

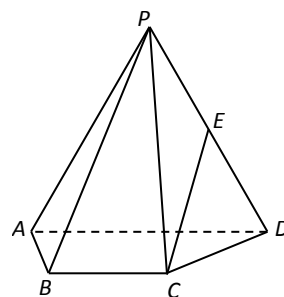
10. 在 A, B, C 三地爆发了流感，这三个地区分别有 6%，5%，4% 的人患了流感.假设这三个地区人口数的比为 6:5:4，现从这三个地区中任选一人，这个人患流感的概率是_____.

四. 解答题

11. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = 2BC = 2AB = 4$, $\triangle PAD$ 为等边三角形, E 为 PD 的中点, 直线 AB 与 CE 所成角的大小为 45° .

(1) 求证: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成角的正弦值.



(第 11 题图)

12. (1) 求值: $C_{3n}^{38-n} + C_{n+21}^{3n}$.

(2) 已知二项式 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ ($n \in N^*$). 若二项展开式中第 9 项, 第 10 项, 第 11 项的二项式系数成等差数列, 且存在常数项,

①求 n 的值;

②记二项展开式中第 $r+1$ 项的系数为 a_r , 求 $\sum_{r=0}^n r a_r$.

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学周三练试卷 4 解析版

一. 单选题

1. 已知向量 $\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (x, y, -4)$, 且 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $x + y =$ ()

A. 4

B. 8

C. -4

D. -8

【答案】C

【详解】 $\because$ 向量 $\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (x, y, -4)$, 且 $\vec{a} // \vec{b}$,

$$\therefore \frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = -\frac{4}{2}, \text{ 解得 } x = -6, y = 2.$$

$$\therefore x + y = -4,$$

故选: C.

2. 已知离散型随机变量 X 的分布列服从两点分布, 且 $P(X = 0) = 3 - 4P(X = 1) = a$, 则 $a =$ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

【答案】C

【详解】因为 X 的分布列服从两点分布, 所以 $P(X = 0) + P(X = 1) = 1$,

因为 $P(X = 0) = 3 - 4P(X = 1) = a$, 所以 $P(X = 0) = 3 - 4[1 - P(X = 0)]$

$$\therefore P(X = 0) = \frac{1}{3}, \therefore a = \frac{1}{3}$$

故选: C

3. 有 10 件产品, 其中 3 件是次品, 从中一次任取两件, 若 X 表示取得次品的个数, 则 $P(x < 2)$ 等于 ()

A. $\frac{7}{15}$

B. $\frac{14}{15}$

C. $\frac{8}{15}$

D. 1

【答案】B

4. $(x - \sqrt{2}y)^{10}$ 的展开式中 $x^6 y^4$ 的系数是 ()

A. -840

B. 840

C. 210

D. -210

【答案】B

展开式的通项 $T_{r+1} = C_{10}^r x^{10-r} (-\sqrt{2}y)^r = C_{10}^r (-\sqrt{2})^r x^{10-r} y^r$

令 $r = 4$ 得 $x^6 y^4$ 的系数为 $C_{10}^4 (-\sqrt{2})^4 = 840$

5. 现有语文、数学、英语、物理、化学、生物各 1 本书，把这 6 本书分别放入 3 个不同的抽屉里，要求每个抽屉至少放一本书且语文和数学放在同一个抽屉里，则不同的放法总数为（ ）

- A. 78 B. 126 C. 148 D. 150

【答案】D

6. 若 $(1-x)^8 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_8(1+x)^8$ ，则 $a_6 =$ （ ）

- A. -448 B. -112 C. 112 D. 448

【答案】C

【解析】

$$(1-x)^8 = (x-1)^8 = [(1+x)-2]^8 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_8(1+x)^8, \quad a_6 = C_8^2 \cdot (-2)^2 = 112.$$

故选：C.

四. 多选题

7. 从 6 名男生和 4 名女生中选出 4 人去参加一项创新大赛，则下列说法正确的有（ ）

- A. 如果 4 人全部为男生，那么有 30 种不同的选法
B. 如果 4 人中男生女生各有 2 人，那么有 30 种不同的选法
C. 如果男生中的甲和女生中的乙必须在内，那么有 28 种不同的选法
D. 如果男生中的甲和女生中的乙至少要有 1 人在内，那么有 140 种不同的选法

【7 题答案】

【答案】CD

【详解】A：如果 4 人中全部为男生，选法有 $C_6^4 = 15$ 种，故 A 错误；

B：如果 4 人中男生女生各有 2 人，男生的选法有 $C_6^2 = 15$ 种，女生的选法有 $C_4^2 = 6$ 种，则 4 人中男生女生各有 2 人选法有 $15 \times 6 = 90$ 种，B 错误；

C：如果男生中的甲和女生中的乙必须在内，在剩下的 8 人中再选 2 人即可，有 $C_8^2 = 28$ 种，故 C 正确；

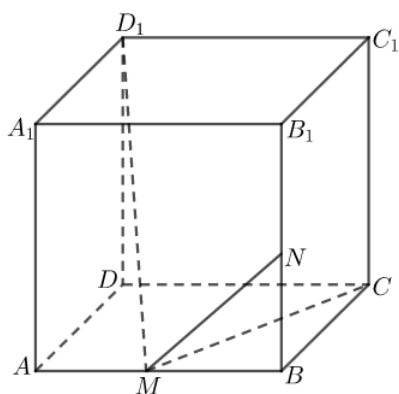
D：在 10 人中任选 4 人，有 $C_{10}^4 = 210$ 种，甲乙都不在其中 选法有 $C_8^4 = 70$ ，

故男生中的甲和女生中的乙至少要有 1 人在内的选法有 $210 - 70 = 140$ 种，故 D 正确.

故选：CD.

8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = 3$ ，点 M, N 分别在棱 AB 和 BB_1 上运动（不含端点），

若 $D_1M \perp MN$ ，下列命题正确的是（ ）

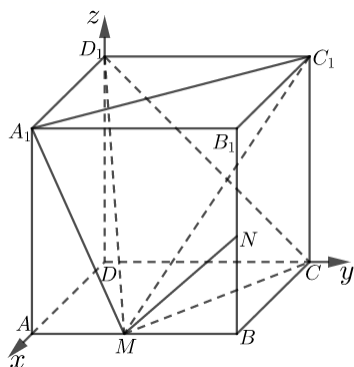


- A. $MN \perp A_1M$ B. $MN \perp$ 平面 D_1MC
- C. 线段 BN 长度的最大值为 $\frac{3}{4}$ D. 三棱锥 $C_1-A_1D_1M$ 体积不变

【答案】ACD

【解析】

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以点 D 为原点，射线 DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 轴非负半轴建立空间直角坐标系，如图：



$A_1(3, 0, 3), D_1(0, 0, 3), C(0, 3, 0), B(3, 3, 0)$ ，设 $M(3, y, 0), N(3, 3, z)$ ， $y, z \in (0, 3)$ ，

$\overrightarrow{D_1M} = (3, y, -3), \overrightarrow{MN} = (0, 3-y, z)$ ，而 $D_1M \perp MN$

则 $\overrightarrow{D_1M} \cdot \overrightarrow{MN} = y(3-y) - 3z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{3}y(3-y)$ ，

对于 A 选项： $\overrightarrow{A_1M} = (0, y, -3)$ ，则 $\overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{MN} = y(3-y) - 3z = 0 \Rightarrow \overrightarrow{A_1M} \perp \overrightarrow{MN}$ ， $MN \perp A_1M$ ，A 正确；

对于 B 选项： $\overrightarrow{CM} = (3, y-3, 0)$ ， $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MN} = (y-3)(3-y) = -(3-y)^2 < 0$ ，即 CM 与 MN 不垂直，从而 MN 与平面 D_1MC 不垂直，B 不正确；

对于 C 选项: $\overrightarrow{BN} = (0, 0, z)$, 则线段 BN 长度 $|\overrightarrow{BN}| = z = \frac{1}{3}[-(y - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}] \leq \frac{3}{4}$, 当且仅当 $y = \frac{3}{2}$ 时取 "=",

C 正确;

对于 D 选项: 不论点 M 如何移动, 点 M 到平面 $A_1D_1C_1$ 的距离均为 3, 而 $V_{C_1-A_1D_1M} = V_{M-A_1D_1C_1}$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot S_{\triangle A_1D_1C_1} = \frac{9}{2},$$

三棱锥 $C_1-A_1D_1M$ 体积为定值, 即 D 正确.

故选: ACD

五. 填空题

9. 19^{19} 除以 5 的余数为_____.

【答案】 4

【解析】

由题意得 $19^{19} = (20-1)^{19} = C_{19}^0 20^{19} + C_{19}^1 20^{18}(-1)^1 + C_{19}^2 20^{17}(-1)^2 + \cdots + C_{19}^{18} 20^1(-1)^{18} + C_{19}^{19}(-1)^{19}$,

其中 $C_{19}^0 20^{19} + C_{19}^1 20^{18}(-1)^1 + C_{19}^2 20^{17}(-1)^2 + \cdots + C_{19}^{18} 20^1(-1)^{18}$ 各项都能被 5 整除,

又 $C_{19}^{19}(-1)^{19} = -1$, 所以 19^{19} 除以 5 的余数为 4.

10. 在 A, B, C 三地爆发了流感, 这三个地区分别有 6%, 5%, 4% 的人患了流感. 假设这三个地区人口数的比为 6:5:4, 现从这三个地区中任选一人, 这个人患流感的概率是_____.

【答案】 $\frac{77}{1500}$

【详解】 解: 根据题意可得这个人患流感的概率:

$$P = 6\% \times \frac{6}{6+5+4} + 5\% \times \frac{5}{6+5+4} + 4\% \times \frac{4}{6+5+4} = \frac{77}{1500}.$$

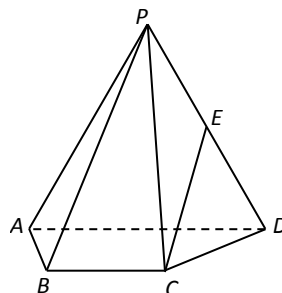
故答案为: $\frac{77}{1500}$.

四. 解答题

11. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = 2BC = 2AB = 4$, $\triangle PAD$ 为等边三角形, E 为 PD 的中点, 直线 AB 与 CE 所成角的大小为 45° .

(1) 求证: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成角的正弦值.



(第 11 题图)

11. 解: (1)取 AD 中点 O , 连接 CO , OE .

在梯形 $ABCD$ 中, 因为 $AD \parallel BC$, $AD=2BC$, 所以四边形 $ABCO$ 为平行四边形, 所以 $CO \parallel AB$, 所以 $\angle OCE$ 即为异面直线 AB 与 CE 所成的角或补角.

在等边 $\triangle PAD$ 中, 因为 E 为 PD 的中点, 所以 $OE = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}AD = 2$.

在 $\triangle OCE$ 中, $OC=AB=2$, 即 $OE=OC=2$, 所以 $\angle OCE$ 为锐角, 从而 $\angle OCE = \angle OEC = 45^\circ$, 所以 $\angle COE = 90^\circ$, 即 $OC \perp OE$.

因为 $\angle ABC = 90^\circ$, 所以四边形 $ABCO$ 为矩形, 所以 $OC \perp AD$.

又 $AD \cap OE = O$, $AD, OE \subset$ 平面 PAD , 所以 $OC \perp$ 平面 PAD .

又因为 $OC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(2)连接 PO , 在等边 $\triangle PAD$ 中, 因为 O 为 AD 中点, 所以 $PO \perp AD$.

由(1)得 $OC \perp$ 平面 PAD , $PO \subset$ 平面 PAD , 所以 $OC \perp PO$.

以 O 为原点, OC, OD, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴,

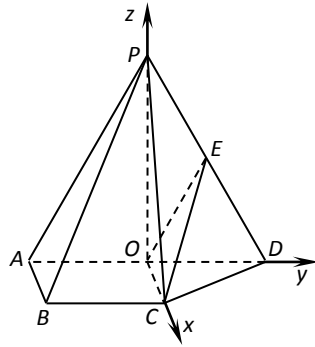
建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $A(0, -2, 0), C(2, 0, 0), D(0, 2, 0), B(2, -2, 0),$

$P(0, 0, 2\sqrt{3}),$

故 $\overrightarrow{AP} = (0, 2, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (2, 0, 0), \overrightarrow{PD} = (0, 2, -2\sqrt{3}),$

$\overrightarrow{CD} = (-2, 2, 0).$



设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 2y + 2\sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 2x = 0, \end{cases}$

不妨取 $z=1$, 得 $\mathbf{m} = (0, -\sqrt{3}, 1).$

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 2y - 2\sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = -2x + 2y = 0, \end{cases}$

不妨取 $z=1$, 得 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1).$

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = -\frac{\sqrt{7}}{7}.$

所以平面 PAB 与平面 PCD 的所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}.$

12. (1) 求值: $C_{3n}^{38-n} + C_{n+21}^{3n}.$

(2) 已知二项式 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ ($n \in N^*$). 若二项展开式中第 9 项, 第 10 项, 第 11 项的二项式系数成等差数列, 且存在常数项,

①求 n 的值;

②记二项展开式中第 $r+1$ 项的系数为 a_r , 求 $\sum_{r=0}^n ra_r$.

12. 【详解】

(1) 由题意 $\begin{cases} 38-n \leq 3n \\ 3n \leq n+21 \end{cases}$, $n \in N^*$, 解得 $n=10$.

$$\therefore C_{3n}^{38-n} + C_{n+21}^{3n} = C_{30}^{28} + C_{31}^{30} = C_{30}^2 + C_{31}^1 = \frac{30 \times 29}{2} + 31 = 466.$$

(2) 【答案】①14, ② $-\frac{7}{8192}$

【详解】

①由题意知, $2C_n^9 = C_n^8 + C_n^{10}$,

$$\text{即 } 2 \times \frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{8!(n-8)!} + \frac{n!}{10!(n-10)!}, \text{ 即 } \frac{2}{9(n-9)} = \frac{1}{(n-8)(n-9)} + \frac{1}{90},$$

即 $n^2 - 37n + 322 = 0$, 解得 $n=14$ 或 $n=23$.

当 $n=14$ 时, $T_8 = -\frac{1}{2^7} C_{14}^7$, 是常数项, 符合题意;

当 $n=23$ 时, 若 $T_{r+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^r C_{23}^r x^{\frac{23-2r}{3}}$ 是常数项, 则 $r = \frac{23}{2} \notin N$, 不符合题意.

故 n 的值为 14.

②由①知, $n=14$, 则 $a_r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r C_{14}^r$, 所以 $ra_r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r r C_{14}^r$.

$$\text{因为 } r C_{14}^r = r \times \frac{14!}{r!(14-r)!} = 14 \times \frac{13!}{(r-1)!(14-r)!} = 14 C_{13}^{r-1},$$

$$\text{所以 } ra_r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r 14 C_{13}^{r-1} = -7 C_{13}^{r-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{r-1}.$$

$$\text{所以 } \sum_{r=0}^n r a_r = -7 \sum_{r=1}^{14} C_{13}^{r-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{r-1} = -7 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{13} = -\frac{7}{2^{13}} = -\frac{7}{8192}.$$