

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

第 6 章 空间向量与立体几何

§ 6.1 空间向量及其运算

6.1.1 空间向量的线性运算

研制人：周国祥 审核人：鲁媛媛

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

本课在课程标准中的表述：①经历由平面向量推广到空间向量的过程，了解空间向量的概念；

②经历由平面向量的运算及其法则推广到空间向量的过程。

一、学习目标：

1. 了解空间向量的概念，掌握空间向量的几何表示与字母表示.
2. 掌握空间向量的线性运算(加法、减法和数乘)及其运算律.
3. 掌握共线向量定理，会用共线向量定理解决相关问题.

二、课前自学

回顾平面向量的概念及其运算法则；平面向量共线定理。类比得出空间向量的相关概念和线性运算

1. 空间向量的概念：在空间，既有大小又有方向的量，叫作空间向量。

注：(1) 空间的一个平移就是一个向量；

(2) 向量一般用有向线段表示，同向等长的有向线段表示同一或相等的向量；

(3) 空间的两个向量可用同一平面内的两条有向线段来表示。

问题 1 联想平面向量的线性运算，思考空间向量的线性运算包括哪些？其相应的运算法则在空间向量中是否依然适用？

2. 空间向量的运算

定义：与平面向量运算一样，空间向量的加法、减法与数乘向量运算如下（如图）

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \vec{a} (\lambda \in \mathbb{R})$$

运算律：

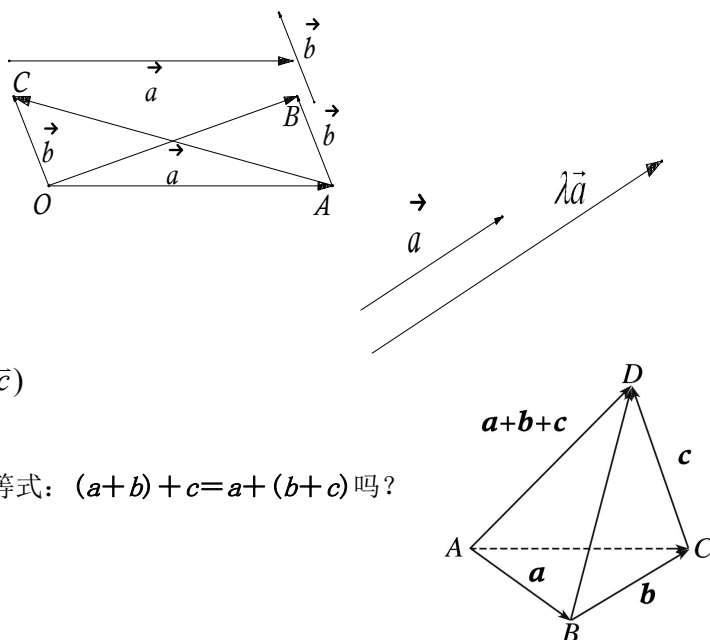
(1) 加法交换律： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(2) 加法结合律： $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(3) 数乘分配律： $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

问题 2 你能借助向量加法的几何意义证明等式： $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ 吗？

提示：如图



3. 共线向量

与平面向量一样，如果表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量叫做共线向量或平行向量. $\vec{a}$ 平行于 $\vec{b}$ 记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

规定：零向量与任意向量共线

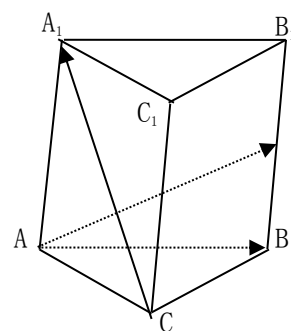
当我们说向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 共线（或 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ）时，表示 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的有向线段所在的直线可能是同一直线，也可能是平行直线.

4. 共线向量定理：

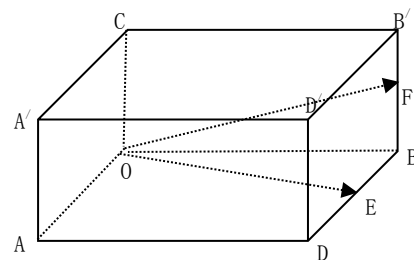
三、问题探究

例 1. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，M 是 BB_1 的中点，化简下列各式，并在图中标出化简得到的向量：

- (1) $\vec{CB} + \vec{BA_1}$;
- (2) $\vec{AC} + \vec{CB} + \frac{1}{2} \vec{AA_1}$;
- (3) $\vec{AA_1} - \vec{AC} - \vec{CB}$

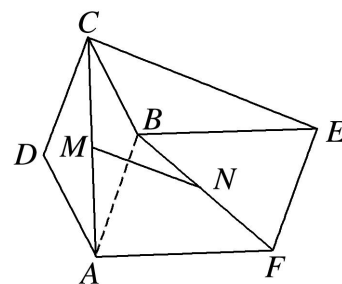


例 2. 如图，在长方体 $OADB - CA'D'B'$ 中， $OA=3, OB=4, OC=2, OI=OJ=OK=1$ ，点 E, F 分别是 $DB, D'B'$ 的中点，设 $\vec{OI} = \vec{i}, \vec{OJ} = \vec{j}, \vec{OK} = \vec{k}$ ，试用向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示 $\vec{OE}$ 和 $\vec{OF}$



例 3. 如图，四边形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 都是平行四边形，且不共面，M, N 分别是 AC, BF 的中点，

求证： $CE \parallel MN$.



四、反馈练习

课本 7 页练习 1—5

五、课堂小结

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.1.2 空间向量的数量积

研制人：周国祥

审核人：鲁媛媛

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

本课在课程标准中的表述：①掌握空间向量的数量积；②了解空间向量投影的概念以及投影向量的意义

一、学习目标：

1. 掌握空间向量夹角的概念；
2. 掌握空间向量的数量积的概念、性质及运算律；
3. 了解空间向量数量积的几何意义。

重点难点：

- 1 空间向量夹角的概念；
- 2 类比平面向量的数量积，得到空间向量的数量积，并会使用；
- 3 在空间几何体中，利用数量积解决角度、长度、垂直等问题。

二、课前自学

（一）复习回顾：平面向量的数量积

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____，其中 θ 指 _____
2. 两个平面向量的数量积是实数还是向量？
3. 设平面向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 和实数 λ ，则平面向量的数量积满足下列运算律
① $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____
② $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} =$ _____
③ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} =$ _____
4. 已知 $|\vec{a}|=4$ ， $|\vec{b}|=6$ ，平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° ，求
(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ； (2) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ ； (3) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$ ； (4) $|\vec{a} + \vec{b}|$

（二）新课学习

我们知道，任意两个空间向量都可以通过平移转化为同一平面内的向量，因此，两个空间向量的夹角和数量积就可以像平面向量那样来定义。

1. 夹角

定义： $\vec{a}, \vec{b}$ 是空间两个非零向量，过空间任意一点 O ，作 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ ，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角，记作 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 规定： $0 \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \pi$

思考： $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 与 $\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ 相等吗？

特别地，如果 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ ，那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向；如果 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \pi$ ，那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向；如果 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 90^\circ$ ，那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 。

2. 数量积

(1) 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是空间两个非零向量，我们把数量 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 叫作向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积，记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

规定：零向量与任一向量的数量积为 0

(2) 夹角： $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ 。

总结：对于非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，有：

$$1) \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \underline{\hspace{2cm}} \quad 2) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \quad 3) |\vec{a}|^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

思考： $\vec{0} \cdot \vec{a}$ 是零向量吗？ $\vec{0} \cdot \vec{a}$ 是零向量吗？

(3) 运算律： $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ； $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ； $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

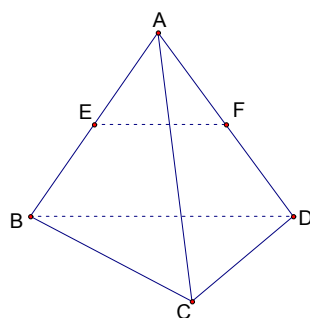
三、问题探究

例 1. 已知 $|\vec{a}|=4$ ， $|\vec{b}|=3\sqrt{2}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b}=12$ ，求 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

例 2. 在正四面体 ABCD 中，棱长为 1，点 E, F 分别为 AB, AD 的中点。求：

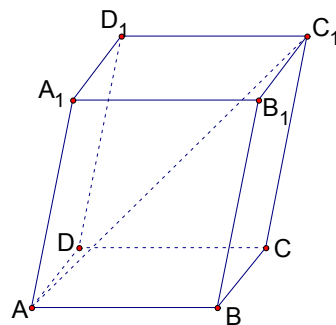
$$(1) \vec{EF} \cdot \vec{BA}, \quad (2) \vec{EF} \cdot \vec{BD},$$

$$(3) \vec{EF} \cdot \vec{DC}, \quad (4) \vec{EF} \cdot \vec{AC}$$



例 3. 已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 ABCD 是矩形， $AB=4$ ， $AD=3$ ， $AA_1=5$ ，

$\angle BAA_1 = \angle DAA_1 = 60^\circ$ ，求 AC_1 的长。

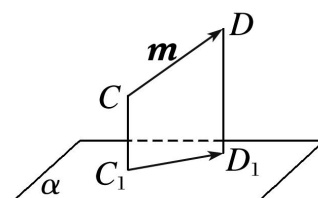


3. 空间向量的投影向量

问题 平面向量中向量 $\boldsymbol{a}$ 同向量 $\boldsymbol{b}$ 的投影是如何定义的？

(1) 空间投影向量的定义

如图，设向量 $\boldsymbol{m} = \overrightarrow{CD}$ ，过 C, D 分别作平面 α 的垂线，垂足分别为 C_1, D_1 ，得向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$. 向量 $\overrightarrow{C_1D_1}$ 称为向量 $\boldsymbol{m}$ 在平面 α 上的投影向量.



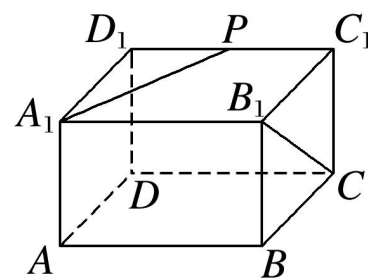
(2) 空间向量数量积的几何意义

空间向量 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ 在平面 α 内) 的数量积就是向量 $\boldsymbol{m}$ 在平面 α 上的投影向量与向量 $\boldsymbol{n}$ 的数量积.

例 4. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $AD=AA_1=1, AB=2$ ， P 是 C_1D_1 的中点.

(1) 确定向量 $\overrightarrow{A_1P}$ 在平面 BCC_1 上的投影向量，并求 $\overrightarrow{B_1C} \cdot \overrightarrow{A_1P}$;

(2) 确定向量 $\overrightarrow{A_1P}$ 在直线 B_1C_1 上的投影向量，并求 $\overrightarrow{B_1C_1} \cdot \overrightarrow{A_1P}$.



四、反馈练习

课本 11 页练习 1—5

五、课堂小结

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.1.3 共面向量定理

研制人：周国祥

审核人：鲁媛媛

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

本课在课程标准中的表述：①经历由平面向量推广到空间向量的过程，了解空间向量的概念；
②经历由平面向量的运算及其法则推广到空间向量的过程。

一、学习目标：

1. 了解共面向量的概念.
2. 理解空间共面向量定理，会证明直线与平面平行.
3. 理解空间向量共面的充要条件，会证明空间四点共面.

二、课前自学

1. 共面向量的定义

一般地，能平移到同一个平面内的向量叫共面向量；

理解：若 $\vec{a}, \vec{b}$ 为不共线且同在平面 α 内，则 $\vec{p}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面的意义是 $\vec{p}$ 在 α 内或 $\vec{p} // \alpha$

2. 共面向量的判定

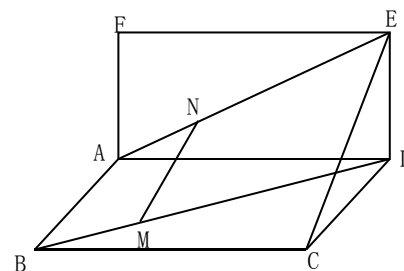
平面向量中，向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 共线的充要条件是 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ ，类比到空间向量，即有：
共面向量定理：

这就是说，向量 $\vec{p}$ 可以由不共线的两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 线性表示。

三、问题探究

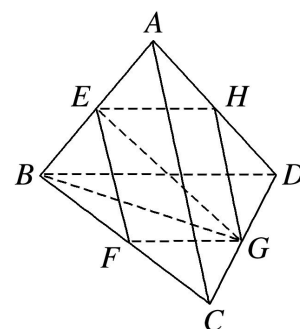
例 1. 如图，已知矩形 ABCD 和矩形 ADEF 所在平面互相垂直，点 M, N 分别在对角线 BD, AE 上，

且 $BM = \frac{1}{3}BD, AN = \frac{1}{3}AE$. 求证: $MN \parallel$ 平面 CDE.



例 2. 设空间任意一点 O 和不共线的三点 A, B, C , 若点 P 满足向量关系 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ (其中 $x+y+z=1$) 试问: P, A, B, C 四点是否共面?

例 3. 已知 E, F, G, H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 的中点, 试用向量法证明: (1) E, F, G, H 四点共面. (2) $BD \parallel$ 平面 $EFGH$.



四、反馈练习

课本 14 页练习 1—6

五、课堂小结

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.2.1 空间向量基本定理

研制人：周国祥

审核人：鲁媛媛

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

本课在课程标准中的表述：①经历由平面向量推广到空间向量的过程，了解空间向量的概念；②经历由平面向量的运算及其法则推广到空间向量的过程；③了解空间向量基本定理及其意义，掌握空间向量的正交分解及其坐标表示。

一、学习目标：

1. 掌握空间向量的基本定理及其推论，理解空间任意一个向量可以用不共面的三个已知向量线性表示，而且这种表示是唯一的；
2. 在简单问题中，会选择适当的基底来表示任一空间向量。

重点难点：

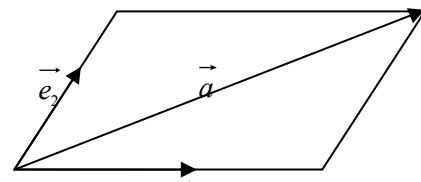
- 1 空间向量的基本定理及其推论；
- 2 空间向量的基本定理唯一性的理解。

二、课前自学

（一）复习回顾：平面向量基本定理的内容及其理解

如果 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\vec{a}$ ，有且

只有一对实数 λ_1, λ_2 ，使 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$



（二）新课学习

1. 空间向量的基本定理

如果三个向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 不共面，那么对空间任一向量 $\vec{p}$ ，存在一个唯一的有序实数组

(x, y, z) ，使 $\vec{p} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

证明：（存在性）设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 不共面，过点 O 作 $\vec{OA} = \vec{e}_1, \vec{OB} = \vec{e}_2, \vec{OC} = \vec{e}_3, \vec{OP} = \vec{p}$

过点 P 作直线 PP' 平行于 OC ，交平面 OAB 于点 P' ；在平面 OAB 内，过点 P' 作直线 $P'A' \parallel OB, P'B' \parallel OA$ ，分别与直线 OA, OB 相交于点 A', B' ，

于是，存在三个实数 x, y, z ，

$$\text{使 } \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1, \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} = y\vec{e}_2, \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} = z\vec{e}_3$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

$$\text{所以 } \vec{p} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

(唯一性) 假设还存在 x', y', z' 使 $\vec{p} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$

$$\therefore x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$$

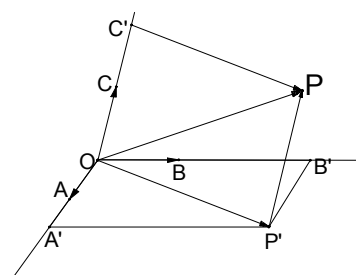
$$\therefore (x-x')\vec{e}_1 + (y-y')\vec{e}_2 + (z-z')\vec{e}_3 = \vec{0}$$

不妨设 $x \neq x'$ 即 $x-x' \neq 0$

$$\therefore \vec{e}_1 = -\frac{y-y'}{x-x'}\vec{e}_2 - \frac{z-z'}{x-x'}\vec{e}_3$$

$$\therefore \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ 共面此与已知矛盾} \quad \therefore \text{该表达式唯一.}$$

综上两方面，原命题成立。



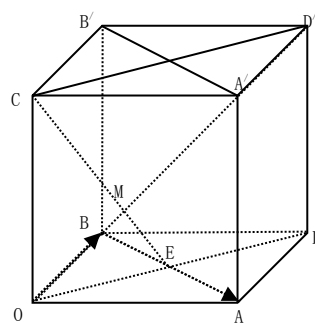
由此定理，若三向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 不共面，那么空间的任一向量都可由 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 线性表示，我们把 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 叫做空间的一个**基底**， $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 叫做**基向量**。空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个**基底**。

如果空间一个基底的三个基向量两两互相垂直，那么这个基底叫做正交基底，特别地，当一个正交基底的三个基向量都是单位向量时，称这个基底为单位正交基底，通常用 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 表示。

推论：设 O, A, B, C 是不共面的四点，则对空间任一点 P ，都存在唯一的三个有序实数 x, y, z ，使 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ 。

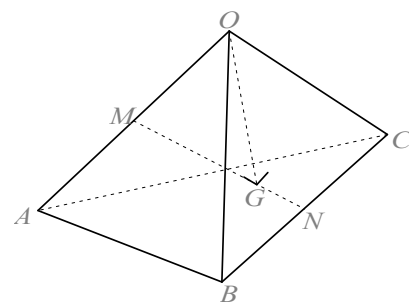
三、问题探究

例 1. 如图，在正方体 $OADB-CA'D'B'$ 中，点 E 是 AB 与 OD 的交点， M 是 OD' 与 CE 的交点，试分别用向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OD'}$ 和 $\overrightarrow{OM}$



例 2. 如图，已知空间四边形 $OABC$ ，其对角线 OB, AC ， M, N 分别是对边 OA, BC 的中点，

点 G 在线段 MN 上, 且 $MG = 2GN$, 用基底向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$.



四、反馈练习

课本 19 页练习 1-5

五、课堂小结

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.2.2 空间向量的坐标表示 (1)

研制人: 周国祥

审核人: 鲁媛媛

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____ 授课日期: _____

本课在课程标准中的表述: ①了解空间向量基本定理及其意义, 掌握空间向量的正交分解及其坐标表示; ②掌握空间向量的线性运算及其坐标表示; ③掌握空间向量的数量积及其坐标表示。

一、学习目标:

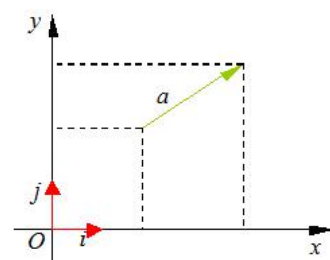
1. 能用坐标表示空间向量, 掌握空间向量的坐标运算;
2. 会根据向量的坐标判断两个空间向量平行。

重点难点:

空间向量的坐标运算;

二、课前自学

(一) **复习回顾:** 平面向量的坐标表示: 分别取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 作为基底。任作一个向量 $\vec{a}$, 由平面向量基本定理知, 有且只有一对实数 x 、 y , 使得 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, 把 (x, y) 叫做向量 $\vec{a}$ 的 (直角) 坐标, 记作 $\vec{a} = (x, y)$ 其中 x 叫做 $\vec{a}$ 在 x 轴上的坐标, y 叫做 $\vec{a}$ 在 y 轴上的坐标, 特别地, $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$, $\vec{0} = (0, 0)$



（二）新课学习

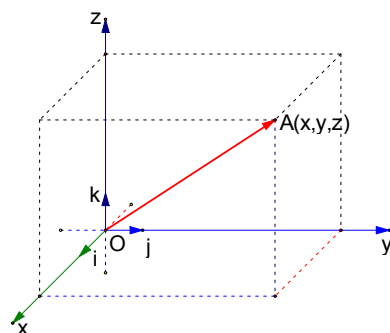
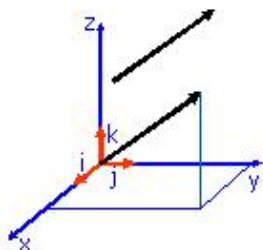
1. 空间直角坐标系：

（1）若空间的一个基底的三个基向量互相垂直，且长为1，这个基底叫单位正交基底，用 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 表示；

（2）在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ，以点 O 为原点，分别以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的方向为正方向建立三条数轴： x 轴、 y 轴、 z 轴，它们都叫坐标轴。我们称建立了一个空间直角坐标系 $O-xyz$ ，点 O 叫原点，向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 都叫坐标向量。通过每两个坐标轴的平面叫坐标平面，分别称为 xOy 平面， yOz 平面， zOx 平面；

（3）作空间直角坐标系 $O-xyz$ 时，一般使 $\angle xOy = 135^\circ$ （或 45° ）， $\angle yOz = 90^\circ$ ；

（4）在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指指向 y 轴的正方向，如果中指指向 z 轴的正方向，称这个坐标系为右手直角坐标系。



2. 空间直角坐标系中的坐标：

如图，给定空间直角坐标系和向量 $\vec{a}$ ，设 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为坐标向量，则存在唯一的有序实数组 (a_1, a_2, a_3) ，使 $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ，有序实数组 (a_1, a_2, a_3) 叫作向量 $\vec{a}$ 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标，记作 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 。

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，对空间任一点 A ，存在唯一的有序实数组 (x, y, z) ，使 $\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ，有序实数组 (x, y, z) 叫作向量 $\vec{OA}$ 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标，记作 $\vec{OA} = (x, y, z)$ 。

3. 空间向量的直角坐标运算律

（1）若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，则

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

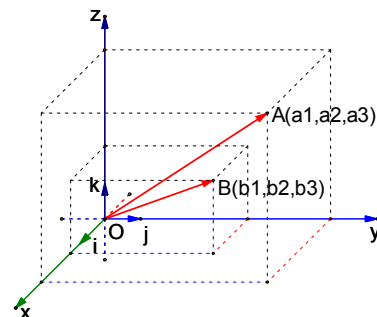
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) (\lambda \in \mathbb{R}),$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3 (\lambda \in \mathbb{R}), \text{ 其中 } \vec{a} \neq \vec{0}$$

（2）若 $A(x_1, y_1, z_1)$ ， $B(x_2, y_2, z_2)$ ，则 $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 。

这就是说：...



三、问题探究

例 1. 已知 $\vec{a} = (1, -3, 8)$ ， $\vec{b} = (3, 10, -4)$ ，求 $\vec{a} + \vec{b}$ ， $\vec{a} - \vec{b}$ ， $3\vec{a}$

例 2. 已知空间四点 $A(-2,3,1)$, $B(2,-5,3)$, $C(10,0,10)$ 和 $D(8,4,9)$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是梯形

例 3. 在长方体中 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=2$, P , Q , R , S 分别是 AA_1 , D_1C_1 , AB , CC_1 的中点, 用向量知识证明: $PQ \parallel RS$

点评: 利用向量的坐标运算判断空间几何关系的关键: 首先要选定单位正交基, 进而确定各向量的坐标, 再利用向量的坐标运算确定几何关系。

四、反馈练习

课本 22 页练习 1—7

五、课堂小结

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.2.2 空间向量的坐标表示 (2)

研制人: 周国祥

审核人: 鲁媛媛

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____ 授课日期: _____

本课在课程标准中的表述: ①了解空间向量基本定理及其意义, 掌握空间向量的正交分解及其坐标表示; ②掌握空间向量的线性运算及其坐标表示; ③掌握空间向量的数量积及其坐标表示。

一、学习目标:

掌握空间向量数量积的坐标形式, 会用向量的方法解决有关垂直、夹角和距离的简单问题

重点难点:

理解空间向量的坐标运算规律及规律的应用

二、课前自学

(一) 复习回顾: 平面向量的数量积的坐标表示:

1. 若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____

2. 若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 如何用向量的方法证明 $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$?

(二) 新课学习

对于空间两个非零向量, 它们的数量积的坐标表示又是怎样的呢?

1. 空间两个非零向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. 如何证明?

说明: (1) 数量积的结果为数量.

(2) 两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和.

2. 距离的坐标形式:

(1) 若向量 $\vec{a} = (x, y, z)$, 则向量 $\vec{a}$ 的长度 (模) 公式: $|\vec{a}| =$ _____

(2) 空间两点的距离公式: 若 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则 $AB =$ _____

3. 向量夹角的坐标表示: 若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ _____

特别地, $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

思考: 当 $0 < \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 1$ 及 $-1 < \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 0$ 时, 夹角分别在什么范围内?

三、问题探究

例 1. 已知 $A(3, 1, 3)$ 、 $B(1, 5, 0)$, 求: (1) 线段 AB 的中点坐标和长度;

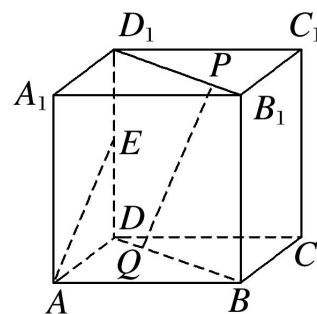
(2) 到 A、B 两点距离相等的点的 $P(x, y, z)$ 坐标 x, y, z 满足的条件.

思考: 如何用向量的方法推导出线段 AB 的中点坐标公式?

设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 线段 AB 的中点为 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

例 2. 已知三角形的顶点是 $A(1, -1, 1)$, $B(2, 1, -1)$, $C(-1, -1, -2)$, 试求这个三角形的面积.

例 3. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是棱 D_1D 的中点， P, Q 分别为线段 B_1D_1, BD 上的点，且 $3\vec{B_1P} = \vec{PD_1}$ ，若 $PQ \perp AE$ ， $\vec{BD} = \lambda \vec{DQ}$ ，求 λ 的值.



反思总结：用向量计算或证明几何问题时，可以先建立直角坐标系，然后把向量、点坐标化，借助向量的直角坐标运算法则进行计算或证明。

四、反馈练习

课本 24 页练习 1-5

五、课堂小结

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.3.1 直线的方向向量与平面的法向量

研制人：周国祥

审核人：鲁媛媛

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

本课在课程标准中的表述：①能用向量语言指述直线和平面，理解直线的方向向量与平面的法向量。

一、学习目标

1. 理解直线的方向向量和平面的法向量；
2. 会用待定系数法求平面的法向量。

二、课前自学

平面坐标系中用直线的倾斜角、斜率来刻画直线平行与垂直的位置关系。如何用向量来描述空间的两条直线、直线和平面、平面和平面的位置关系？

1、直线的方向向量

我们把直线 l 上的向量 $\vec{e}$ ($\vec{e} \neq \vec{0}$) 以及与 $\vec{e}$ 共线的非零向量叫做直线 l 的方向向量。

注：(1)空间中，一个向量成为直线 l 的方向向量，必须具备以下两个条件：①是非零向量；

②向量所在的直线与 l 平行或重合；

(2)与直线 l 平行的任意非零向量 a 都是直线的方向向量，且直线 l 的方向向量有无数个。

2、平面的法向量

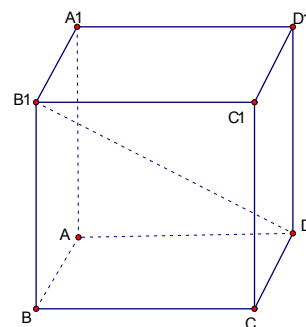
如果表示非零向量 $\vec{n}$ 的有向线段所在直线垂直于平面 α ，则称向量 $\vec{n}$ 垂直于平面 α ，记作 $\vec{n} \perp \alpha$ ，此时，我们把向量 $\vec{n}$ 叫做平面 α 的法向量。

注：(1)平面 α 的一个法向量垂直于平面 α 内的所有向量；

(2)一个平面的法向量有无限多个，它们相互平行。

三、问题探究

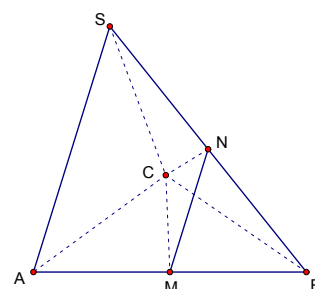
例 1. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，求证： $\overrightarrow{DB_1}$ 是平面 ACD_1 的法向量。



变式：求平面 ACD_1 的一个法向量。

例 2. 如图所示，在三棱锥 $S - ABC$ 中， $\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形， $SA = SC = 4$ ，平面 $SAC \perp$ 平面 ABC ， M, N 分别是 AB, SB 的中点。

- (1) 求平面 CMN 的一个法向量；
- (2) 求证： $AC \perp SB$ ；
- (3) 求平面 SBC 的一个法向量。



例 3. 在空间直角坐标系内, 设平面 α 经过点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 平面 α 的法向量为 $\vec{e} = (A, B, C)$, $M(x, y, z)$ 为平面 α 内任意一点, 求 x, y, z 满足的关系式.

四、反馈练习

课本 28 页练习 1-5

五、课堂小结

- 1、直线的方向向量与平面法向量的概念;
- 2、求平面法向量的方法.

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.3.2 空间线面关系的判定 (1)

研制人: 周国祥

审核人: 鲁媛媛

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____ 授课日

期: _____.

本课在课程标准中的表述: ①能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的夹

角以及垂直与平行关系；②能用向量方法证明必修内容中有关直线、平面位置关系的判定定理。

一、学习目标

1. 能用向量语言描述线线、线面、面面的平行与垂直关系；
2. 能用向量方法证明空间线面位置关系的一些定理；
3. 能用向量方法判断空间线面垂直关系。

重点、难点：用向量方法判断空间线面垂直关系

二、课前自学

- 1、复习回顾：（1）空间直线与平面平行与垂直的定义及判定；
（2）直线的方向向量与平面的法向量的定义。

2、填空：设空间两条直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ ，两个平面 α_1, α_2 的法向量分别为 $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ ，则有如下结论：

	平行	垂直
与		
与		
与		

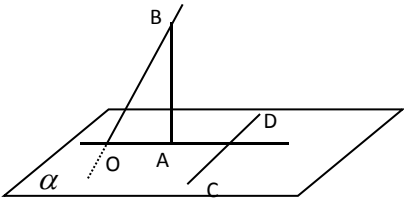
上表给出了用向量研究空间线线、线面、面面位置关系的方法，要理解掌握。

三、问题探究

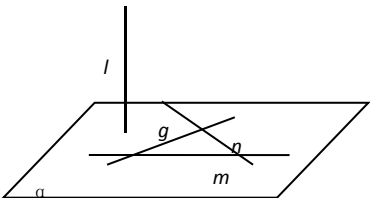
例 1. 证明：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。（三垂线定理）

已知：如图, OB 是平面 α 的斜线, O 为斜足, $AB \perp \alpha$, A 为垂足, $CD \subset \alpha, CD \perp OA$

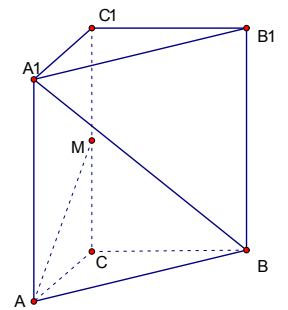
求证： $CD \perp OB$



例 2. 证明：如果一条直线和平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线垂直于这个平面。（直线与平面垂直的判定定理）



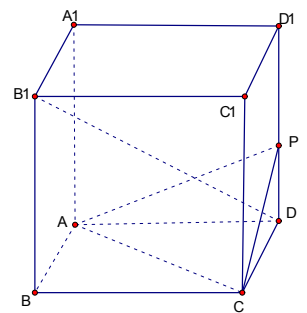
例 3. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 1$, $A_1A = \sqrt{6}$, M 是 CC_1 得中点。 求证: $A_1B \perp AM$



四、反馈练习

1. 课本 31 页练习 1, 2, 4

2. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 在棱 DD_1 上是否存在点 P , 使 $B_1D \perp$ 面 PAC ?



五、课堂小结

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.3.2 空间线面关系的判定（2）

研制人：周国祥

审核人：鲁媛媛

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

期：_____

本课在课程标准中的表述：①能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的夹角以及垂直与平行关系；②能用向量方法证明必修内容中有关直线、平面位置关系的判定定理。

一、学习目标

1. 能用向量语言描述线线、线面、面面的平行与垂直关系；
2. 能用向量方法判断空间线面平行与垂直关系。

重点、难点：用向量方法判断空间线面平行与垂直关系

二、课前自学

复习回顾：用向量研究空间线面关系，设空间两条直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ，两个

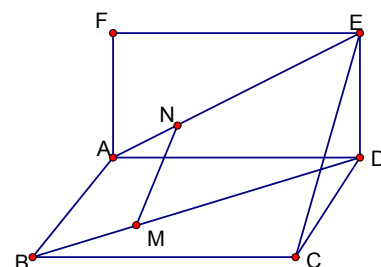
平面 α_1, α_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ ，则由如下结论

	平行	垂直
与		
与		
与		

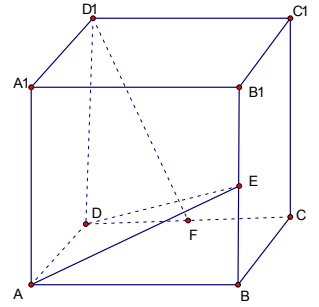
三、问题探究

例 1. 如图，已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 所在平面互相垂直，点 M, N 分别在对角线

BD, AE 上，且 $BM = \frac{1}{3}BD, AN = \frac{1}{3}AE$ ，求证： $MN \parallel$ 平面 CDE



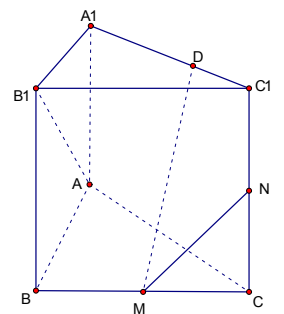
例 2. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BB_1 , CD 中点, 求证: $D_1F \perp$ 平面 ADE



例 3. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各棱长都为 1, M 是底面 BC 边的中点, N 为侧棱 CC_1 的点。

(1) 当 $\frac{CN}{CC_1}$ 为何值时, $MN \perp AB_1$;

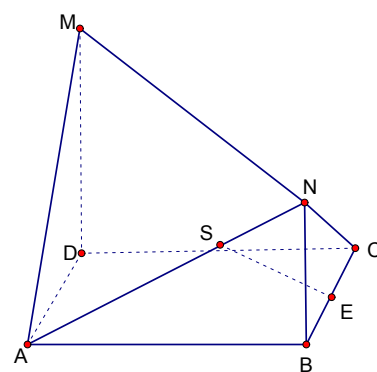
(2) 在棱 A_1C_1 上是否存在点 D, 使 $MD \parallel$ 平面 A_1B_1BA , 若存在, 求出 D 的位置, 若不存在, 说明理由。



例 4. (选讲) 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $MD \perp$ 平面 $ABCD$, $NB \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $MD = NB = 1$, E 是 BC 的中点.

(1) 求异面直线 NE 与 AM 所成角的余弦值;

(2) 在线段 AN 上是否存在点 S , 使得 $ES \perp$ 平面 AMN ? 若存在, 求线段 AS 的长; 若不存在, 请说明理由.



四、反馈练习

课本 31 页练习 5-7

五、课堂小结

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.3.3 空间角的计算 (1)

研制人：周国祥

审核人：鲁媛媛

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

本课在课程标准中的表述：能用向量方法解决点到直线、点到平面、相互平行的直线、相互平行的平面的距离问题和简单夹角问题，并能描述解决这一类问题的程序，体会向量方法在研究几何问题中的作用。

一、学习目标

能用向量方法解决线线、线面的夹角的计算问题

重点、难点：异线角与线面角的计算

二、课前自学

复习回顾：1、异面直线所成的角、线面角的定义及求解方法

2、空间向量的夹角公式

思考：(1) 如何利用向量探求异面直线所成角？能否用两条直线的方向向量的夹角来刻画异面直线所成角？它们的关系如何？

(1) 设两条异面直线所成的角为 θ ，它们的方向向量为 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ ，则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$.

(2) 两条异面直线所成角的范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

注：两条异面直线所成的角与其方向向量的夹角是相等或互补的关系。

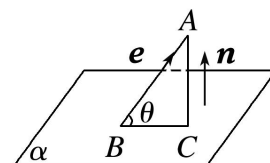
思考：(2) 如何利用向量探求线面角？

设直线 AB 与平面 α 所成的角为 θ ，直线 AB 的方向向量为 $\mathbf{e}$ ，平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}$ ，

则 $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{e}| |\mathbf{n}|}$.

注：

(1) 直线与平面所成的角，可以转化为直线的方向向量与平面的法向量的夹角。

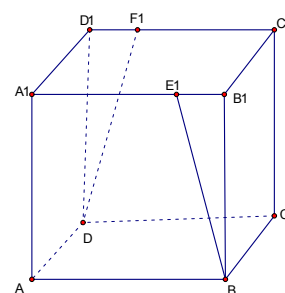


(2)线面角的范围为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

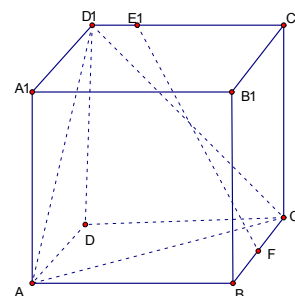
(3)直线与平面所成的角等于其方向向量与平面法向量所成锐角的余角.

三、问题探究

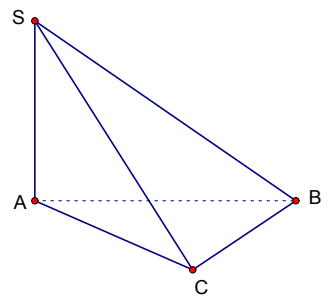
例 1. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E_1, F_1 分别在 A_1B_1, C_1D_1 上, 且 $E_1B_1 = \frac{1}{4}A_1B_1$, $D_1F_1 = \frac{1}{4}D_1C_1$, 求 BE_1 与 DF_1 所成的角的余弦值.



例 2. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, F 是 BC 的中点, 点 E_1 在 D_1C_1 上, 且 $D_1E_1 = \frac{1}{4}D_1C_1$, 试求直线 E_1F 与平面 D_1AC 所成角的正弦值.



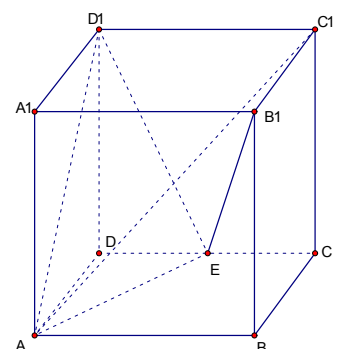
例 3. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\angle SAB = \angle SAC = \angle ACB = 90^\circ$, $AC=2$, $BC=\sqrt{13}$, $SB=\sqrt{29}$. (1) 求证:
 $SC \perp BC$; (2) 求 SC 与 AB 所成角的余弦值.



四、反馈练习

如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 CD 的中点.

- (1) 求证: $EB_1 \perp AD_1$;
- (2) 求 D_1E 与 AC_1 所成的角的余弦值;
- (3) 求 EB_1 与平面 AD_1E 所成的角的余弦值.



五、课堂小结

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.3.3 空间角的计算（2）

研制人：周国祥

审核人：鲁媛媛

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

本课在课程标准中的表述：能用向量方法解决点到直线、点到平面、相互平行的直线、相互平行的平面的距离问题和简单夹角问题，并能描述解决这一类问题的程序，体会向量方法在研究几何问题中的作用。

一、学习目标

能用向量方法解决二面角的计算问题

重点、难点：二面角的计算

二、课前自学

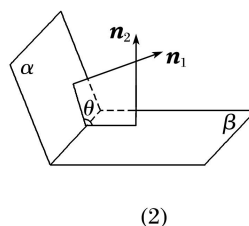
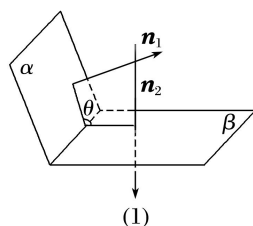
复习回顾：1、二面角的定义及求解方法

2、用向量来探求线面角的方法

思考：你能仿照线面角的求解，研究：如何用向量来求解二面角？

将二面角转化为二面角的两个面的法向量的夹角，如图，向量 $n_1 \perp \alpha$ ， $n_2 \perp \beta$ ，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $\langle n_1, n_2 \rangle$ 或 $\pi - \langle n_1, n_2 \rangle$ ，若二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ ，则 $|\cos \theta|$

$$= \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$$



注：(1)求二面角问题转化为两个平面法向量的夹角问题.

(2)二面角的范围是 $[0, \pi]$.

(3) 一个二面角的大小 θ 与这个二面角的两个半平面的法向量所成的角 α 相等或互补。

注：利用向量求二面角的大小的方法：

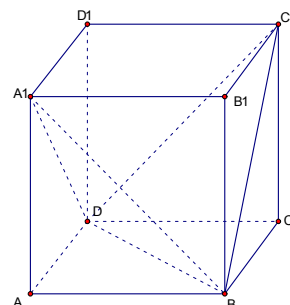
方法一：转化为分别是在二面角的两个半平面内且与棱都垂直的两条直线上的两个向量的夹角（注意：要特别关注两个向量的方向）

方法二：求出二面角一个面内一点到另一个面的距离及到棱的距离，然后通过解直角三角形求角。

方法三：转化为求二面角的两个半平面的法向量夹角或其补角。

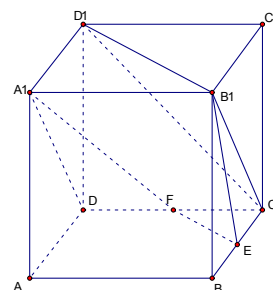
三、问题探究

例 1. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 求二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的余弦值。



例 2. 已知 E, F 分别是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BC 和 CD 的中点, 求：

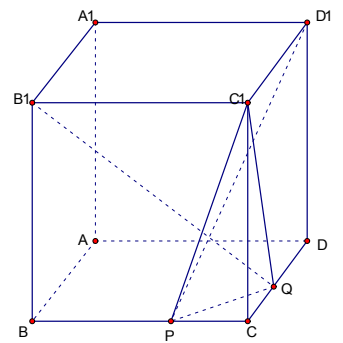
- (1) A_1D 与 EF 所成角的大小；
- (2) A_1F 与平面 B_1EB 所成角的余弦值大小；
- (3) 二面角 $C - D_1B_1 - B$ 的余弦值大小。



例 3. 在如图所示的坐标系中，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, P、Q 分别是 BC 、 CD 上的动点，且 $PQ = \sqrt{2}$.

(1) 确定点 P、Q 的位置，使得 $B_1Q \perp D_1P$;

(2) 当 $B_1Q \perp D_1P$ 时，求二面角 $C_1 - PQ - A$ 的余弦值大小.



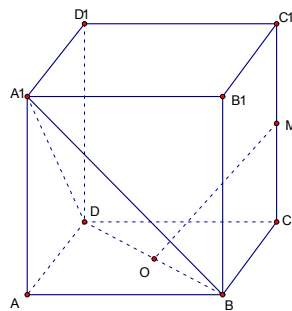
四、反馈练习

1. 在一个二面角的一个面内有一点，它到棱的距离等于到另一个面的距离的 2 倍，求这个二面角的度数。

2. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， O 是底面 $ABCD$ 的中心， M 是 CC_1 的中点。

(1) 求证： $\overrightarrow{OM}$ 是平面 A_1BD 的法向量；

(2) 求二面角 $A - A_1B - D$ 的余弦值大小。



五、课堂小结

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第二学期高二数学学科导学案

6.3.4 空间距离的计算

研制人：周国祥

审核人：鲁媛媛

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

本课在课程标准中的表述：能用向量方法解决点到直线、点到平面、相互平行的直线、相互平行的平面的距离问题和简单夹角问题，并能描述解决这一类问题的程序，体会向量方法在研究几何问题中的作用。

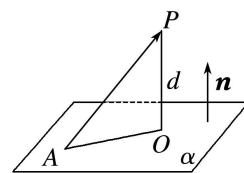
一、学习目标

1. 能用向量方法解决点到直线、点到平面、相互平行的直线、相互平行的平面间的距离问题。
2. 通过空间中距离问题的求解，体会向量方法在研究几何问题中的作用。

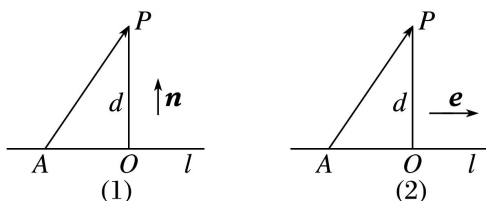
二、课前自学

问题 1 如图， P 是平面 α 外一点， $PO \perp \alpha$ ，垂足为 O ， A 为平面 α 内任意一点，设 $\mathbf{n}$ 为平面 α 的法向量， $\theta = \langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{n} \rangle$ ，如何利用这些条件求点 P 到平面 α 的距离？

点 P 到平面 α 的距离 d 为 $|\overrightarrow{AP}| \cos \theta$ 的绝对值，即 $d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$ 。



问题 2 如图，借助于向量，如何求点 P 到直线 l 的距离 PO ？



思路一：如问题图(1)，若已知与直线 l 垂直的直线 OP 的方向向量 $\mathbf{n}$ ，可利用 $d = \frac{|\vec{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$ 求解。

思路二：如问题图(2)，若已知直线 l 的方向向量 $\mathbf{e}$ ，可利用 $|\vec{AP}| \sin \langle \vec{AP}, \mathbf{e} \rangle$ 求解。

【知识梳理】

(1) 若 P 为直线 l 外一点， A 是 l 上任意一点，在点 P 和直线 l 所确定的平面内，取一个与直线 l 垂直的向量 $\mathbf{n}$ ，则点 P 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|\vec{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$ 。

(2) 设 $\mathbf{e}$ 是直线 l 的方向向量，则点 P 到直线 l 的距离为 $d = |\vec{AP}| \sin \langle \vec{AP}, \mathbf{e} \rangle$ 。

问题 3 类比点到直线的距离的求法，如何求两条平行直线之间的距离？

在其中一条直线上取定一点，则该点到另一条直线的距离即为两条平行直线之间的距离。

【知识梳理】

(1) 如果一条直线 l 与一个平面 α 平行，可在直线 l 上任取一点 P ，将线面距离转化为点 P 到平面 α 的距离求解。

(2) 如果两个平面 α, β 互相平行，在其中一个平面 α 内任取一点 P ，可将两个平行平面的距离转化为点 P 到平面 β 的距离求解。

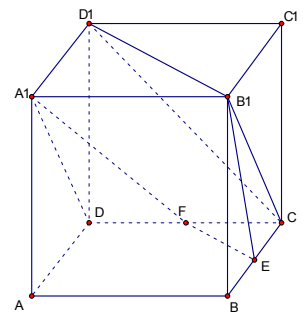
三、问题探究

例 1. 课本 36 页例 10

例 2. 课本 37 页例 11

例 3. 已知 E, F 分别是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BC 和 CD 的中点,

- (1) 求 C_1 到面 CB_1D_1 的距离;
- (2) 求 A_1 到 EF 的距离;
- (3) 求 A_1D 到 EF 的距离;
- (4) 求 A_1D 到面 CB_1D_1 的距离;
- (5) 求面 A_1BD 到面 CB_1D_1 的距离.



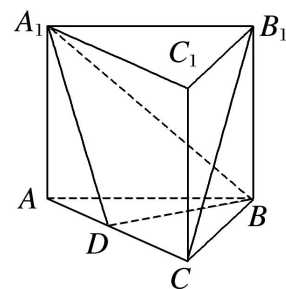
四、反馈练习

1. 课本 39 页练习 3

2. 在直三棱柱中， $AA_1=AB=BC=3$ ， $AC=2$ ， D 是 AC 的中点.

(1) 求证： $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD ;

(2) 求直线 B_1C 到平面 A_1BD 的距离.



五、课堂小结