苏州市2021－2022学年第一学期学业质量阳光指标调研卷
高二数学

2022.1.18

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 直线$x-\frac{\pi}{3}=0$的倾斜角为　　　　(　　)

A. 0　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

2. 已知平面α的一个法向量为$\mathbf{n}=(2,-2,4)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,1,-2)$，则$AB$所在直线$l$与平面$\alpha$的位置关系为　　(　　)

A. $l\perp\alpha$　　B. $l\subset\alpha$

C. l与α相交但不垂直　　D. $l\parallel\alpha$

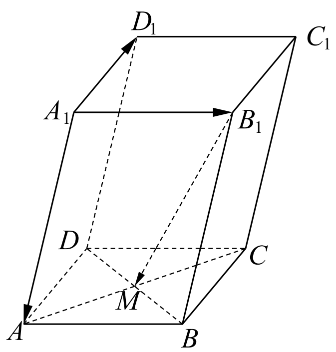
3. 若数列$\left\{\frac{2}{a_n+1}\right\}$是等差数列，$a_1=1$，$a_3=-\frac{1}{3}$，则$a_5=$　　(　　)

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{7}{9}$

4. 已知抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，M是抛物线上一点，过点M作$MN\perp l$于N．若$\triangle MNF$是边长为2的正三角形，则$p=$　　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

5. 如图，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，AC与BD的交点为M．设$\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$，则下列向量中与$\overrightarrow{B_1M}$相等的向量是　　(　　)



A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　B. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

6. 椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上的点$P$到直线$x+2y-9=0$的最短距离为　　(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{9\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{13\sqrt{5}}{5}$

7. 若数列$\{a_n\}$满足$a_2-\frac{1}{2}a_1<a_3-\frac{1}{2}a_2<\cdots<a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}<\cdots$，则称数列$\{a_n\}$为“半差递增”数列．已知“半差递增”数列$\{c_n\}$的前$n$项和$S_n$满足$S_n+2c_n=2t-1(n\in N^*)$，则实数$t$的取值范围是　　(　　)

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　B. $(-\infty,1)$　　C. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $(1,+\infty)$

8. 已知线段 AB 的端点 B 在直线 $l: y=-x+5$ 上,端点 A 在圆 $C_1:(x+1)^2+y^2=4$ 上运动,线段 AB 的中点 M 的轨迹为曲线 C_2,若曲线 C_2 与圆 C_1 有两个公共点,则点 B 的横坐标的取值范围是 (　　)

A. $(-1,0)$　　B. $(1,4)$　　C. $(0,6)$　　D. $(-1,5)$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点为 F_1,F_2,过 F_1 的直线 l 与双曲线右支交于点 P.若 $|PF_1|=2|PF_2|$,且 $\triangle PF_1F_2$ 有一个内角为 $120°$,则双曲线的离心率可能是 (　　)

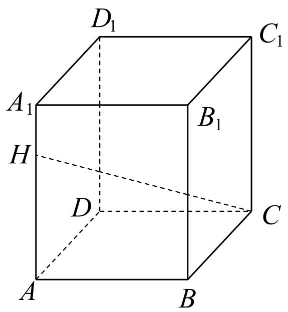
A. $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$　　B. 2　　C. $\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}$　　D. $\sqrt{7}$

10. 如图,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AA_1}(t\in[0,1])$,则下列说法正确的有 (　　)

A. $\overrightarrow{CH}=t\overrightarrow{CA}+(1-t)\overrightarrow{CA_1}$　　B. $\forall t\in[0,1]$,都有 $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

C. $\exists t\in[0,1]$,使得 $\overrightarrow{DH}\parallel\overrightarrow{B_1C}$

D. 若平面 $\alpha\perp CH$,则直线 CD 与平面 α 所成的角大于 $\dfrac{\pi}{4}$



11. 如图1,曲线 $C:(x^2+y^2)^3=16x^2y^2$ 为四叶玫瑰线,它是一个几何亏格为零的代数曲线,这种曲线在苜蓿叶型立交桥的布局中有非常广泛的应用.如图2,苜蓿叶型立交桥有两层,将所有原来需要穿越相交道路的转向都由环形匝道来实现,即让左转车辆驶入环道后再自右侧切向汇入主路,四条环形匝道就形成了苜蓿叶的形状.给出下列结论正确的是 (　　)

A. 曲线 C 只有两条对称轴

B. 曲线 C 仅经过1个整点(即横、纵坐标均为整数的点)

C. 曲线 C 上任意一点到坐标原点 O 的距离都不超过2

D. 过曲线 C 上的任一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为2

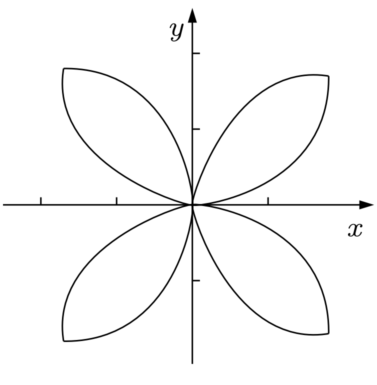


图1

图2

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}, a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{\lambda}{2^n}(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$,其中 $\lambda\in\{-1,0,1\}$,下列说法正确的是 ( )

A. 当 $\lambda=0$ 时,数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

B. 当 $\lambda=-1$ 时,数列 $\{(-2)^n a_n\}$ 是等差数列

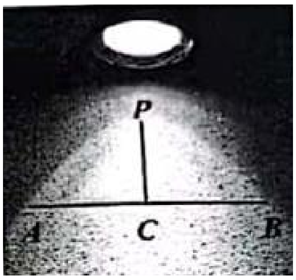
C. 当 $\lambda=1$ 时,数列 $\left\{a_n-\frac{n}{2^n}\right\}$ 是常数列

D. 数列 $\{a_n\}$ 总存住最大项

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 若 $\boldsymbol{a}=(1,-1,\sqrt{2})$,则与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量的坐标为 ______

14. 小明同学发现家中墙壁上灯光的边界类似双曲线的一支.如图,P 为双曲线的顶点,经过测量发现,该双曲线的渐近线相互垂直,$AB\perp PC$,$AB=60$ cm,$PC=20$cm,双曲线的焦点位于直线 PC 上,则该双曲线的焦距为 ______cm.



15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$,且 $a_1=2, a_2=3$,则 a_{2022} 的值为 ______

16. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F,直线 l 过点 F 且与抛物线 C 交于 A,B 两点,以 F 为圆心的圆交线段 AB 于 C,D 两点(从上到下依次为 A,C,D,B),若 $|AC|\|BD|\geqslant|FC|\|FD|$,则该圆的半径 r 的取值范围是 ______

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中,O 为坐标原点,已知直线 $l_1:mx-(2-m)y-4=0$ 与直线 $l_2:x+y-2=0$ 的交点 M 在第一、三象限的角平分线上.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 若点 P 在直线 l_1 上且 $|PM|=\frac{\sqrt{5}}{2}|PO|$,求点 P 的坐标.

18. (12分)

已知函数 $f(x)=\log_{\sqrt{2}}x$,从下列两个条件中选择一个使得数列 $\{a_n\}$ 成等比数列.

条件1:数列 $\{f(a_n)\}$ 是首项为4,公比为2的等比数列;

条件2:数列 $\{f(a_n)\}$ 是首项为4,公差为2的等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{f(a_n)}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

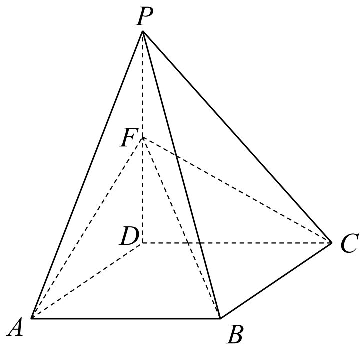
19. (12分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为2的菱形,$\angle DAB=60^\circ$,$PD\perp$ 底面 $ABCD$,点 F 为棱 PD 的中点,二面角 $D-FC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(1) 求 PD 的长;

(2) 求异面直线 BF 与 PA 所成角的余弦值;

(3) 求直线 AF 与平面 BCF 所成角的正弦值.



20. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}+a_n=4n(n\in N^*)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

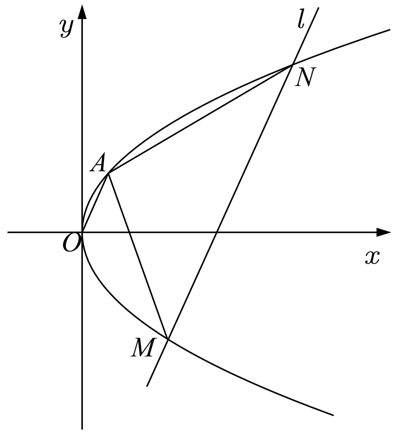
(2) 是否存在正实数 a,使得不等式 $\frac{a_1}{a_1+1}\cdot\frac{a_2}{a_2+1}\cdots\cdots\frac{a_n}{a_n+1}\cdot\sqrt{a_{n+1}}<\frac{a}{2}-\frac{3}{a}$ 对一切正整数 n 都成立?若存在,求出 a 的取值范围;若不存在,请说明理由 .

21. (12 分)

如图,在平面直角坐标系 xOy 中,已知抛物线 $C:y^2=4x$ 经过点 $A(1,2)$,直线 $l:y=kx+b$ 与抛物线 C 交于 M,N 两点.

(1) 若 $\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{OA}$,求直线 l 的方程;

(2) 当 $AM\perp AN$ 时,若对任意满足条件的实数 k,都有 $b=mk+n(m,n$ 为常数),求 $m+2n$ 的值.



22. (12 分)

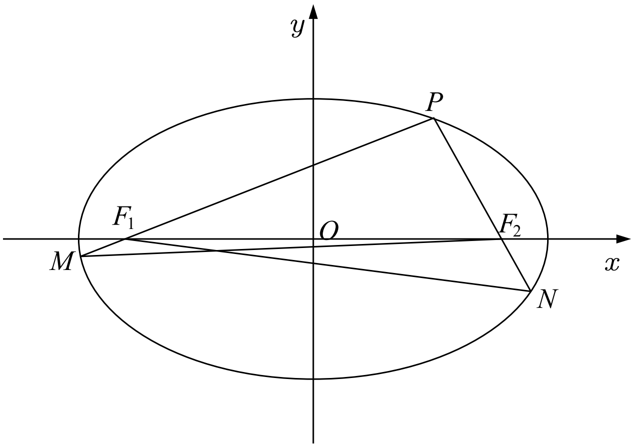
在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.点 P 是椭圆上的一动点,且 P 在第一象限.记 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 S,当 $PF_2\perp F_1F_2$ 时,$S=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 如图,PF_1,PF_2 的延长线分别交椭圆于点 M,N,记 $\triangle MF_1F_2$ 和 $\triangle NF_1F_2$ 的肃积分别为 S_1 和 S_2.

(i) 求证:存在常数 λ,使得 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}=\frac{\lambda}{S}$ 成立;

(ii) 求 S_2-S_1 的最大值.


y
P
F_1
O
F_2
M
x
N