江苏省仪征中学 2021—2022 学年度高二数学第二学期周练试卷 4

测试范围：解析几何、数列、导数、空间向量、计数原理

命题人：张顺军　　审题人：鲁媛媛　　时间：2022 年 3 月 19 日

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40 分）

1．“$a=1$”是“两条直线 $x+ay-1=0$、$x-ay+1=0$ 互相垂直”的（　　）

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】若两条直线 $x+ay-1=0$、$x-ay+1=0$ 互相垂直，则 $1-a^2=0$，解得 $a=\pm1$，

因为 $\{1\}\subsetneqq\{-1,1\}$，因此，“$a=1$”是“两条直线 $x+ay-1=0$、$x-ay+1=0$ 互相垂直”的充分不必要条件.

故选：A.

2. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为　　（　　）

A．10　　B．20　　C．40　　D．80

【答案】C【解析】$\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$ 展开式的通项公式为 $C_5^r\left(x^2\right)^{5-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r=C_5^r\cdot2^r\cdot x^{10-3r}$，令 $10-3r=4$，解得 $r=2$，故含 x^4 的系数为 $C_5^2\cdot2^2=40$，故选 C.

3. 现要从“语文、数学、英语、物理、化学、生物”这 6 科中选出 4 科安排在星期三上午 4 节课，如果“语文”不能安排在第一节，那么不同的安排方法的种数为（　　）

A．280　　B．300　　C．180　　D．360

【答案】B【解析】第一节课从除了语文之外的 5 科中选 1 科，其它 3 节课从 5 科中选 3 科排列，

则一共有 $\mathrm{A}_5^1\mathrm{A}_5^3=5\times5\times4\times3=300$（种）.

故选：B.

4. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有（　　）

A．60 种　　B．120 种　　C．240 种　　D．480 种

【答案】C【解析】根据题意，有一个项目中分配 2 名志愿者，其余各项目中分配 1 名志愿者，可以先从 5 名志愿者中任选 2 人，组成一个小组，有 C_5^2 种选法；然后连同其余三人，看成四个元素，四个项目看成四

个不同的位置，四个不同的元素在四个不同的位置的排列方法数有 4！种，根据乘法原理，完成这件事，共有 $C_5^2\times 4!=240$ 种不同的分配方案，故选：C．

5．设 $\{a_n\}$ 为等比数列，$\{b_n\}$ 为等差数列，且 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_2=1$，$a_{10}=16$，且 $a_6=b_6$，则 $S_{11}=$（　　）

A. 20　　　　B. 30　　　　C. 44　　　　D. 88

【答案】C

【解析】$\because$ $\{a_n\}$ 为等比数列，$\therefore a_6^{\ 2}=a_2\cdot a_{10}=16$ 又 $a_6=a_2\cdot q^4>0$，$\therefore b_6=a_6=4$，

又 $\{b_n\}$ 为等差数列，$\therefore S_{11}=\dfrac{a_1+a_{11}}{2}\times 11=11a_6=44$．　故选：C．

6．设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-9\ln x$ 在区间 $[a-1,a+1]$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(1,2]$　　　　B．$[4,+\infty)$

C．$(-\infty,2]$　　　　D．$(0,3]$

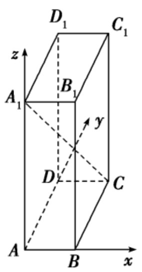
【答案】A

【解析】由 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-9\ln x,(x>0)$，则 $f'(x)=x-\dfrac{9}{x}=\dfrac{x^2-9}{x},(x>0)$，

当 $x\in(0,3)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，

又函数 $f(x)$ 在区间 $[a-1,a+1]$ 上单调递减，所以 $\begin{cases}a-1>0\\a+1\le 3\\a+1>a-1\end{cases}$，解得 $1<a\le 2$，　故选：A.

7．如图，在空间直角坐标系中有长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=1$，$BC=2$，$AA_1=3$，则点 B 到直线 A_1C 的距离为（　　）



A．$\dfrac{2}{7}$　　　　B．$\dfrac{2\sqrt{35}}{7}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{35}}{7}$　　　　D．1

【答案】B

【解析】过点 B 作 BE 垂直 A_1C，垂足为 E，设点 E 的坐标为 (x, y, z)，则 $A_1(0,0,3)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(1,2,-3)$，$\overrightarrow{A_1E}=(x, y, z-3)$，$\overrightarrow{BE}=(x-1, y, z)$.

因为 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\parallel\overrightarrow{A_1C}\\ \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{-3}\\ x-1+2y-3z=0\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}x=\dfrac{5}{7}\\ y=\dfrac{10}{7}\\ z=\dfrac{6}{7}\end{cases}$，所以 $\overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{2}{7}, \dfrac{10}{7}, \dfrac{6}{7}\right)$，

所以点 B 到直线 A_1C 的距离 $|\overrightarrow{BE}|=\dfrac{2\sqrt{35}}{7}$，故答案为 B

8. 已知 O 为坐标原点，过曲线 $C: y=\ln x\,(0<x<1)$ 上一点 P 作 C　切线，交 x 轴于点 A，则 $\triangle AOP$ 面积取最大值时，点 P 的纵坐标为（　　）

A. $\dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　D. $-\mathrm{e}$

【答案】C

【解析】设点 P 的坐标为 $\left(x_0, \ln x_0\right)$ $y'=\dfrac{1}{x}$，当 $x=x_0$ 时，$y'_{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$

$\therefore$ 切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，令 $y=0$，得 $x=x_0-x_0\ln x_0$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(x_0-x_0\ln x_0, 0\right)$ $\because$ $0<x<1$，$\therefore$ $\ln x_0<0$

$\therefore S_{\triangle AOP}=\dfrac{1}{2}\times|\ln x_0|\times(x_0-x_0\ln x_0)=-\dfrac{1}{2}\ln x_0(x_0-x_0\ln x_0)=-\dfrac{1}{2}x_0\ln x_0+\dfrac{1}{2}x_0(\ln x_0)^2$

令 $g(x)=-\dfrac{1}{2}x_0\ln x_0+\dfrac{1}{2}x_0(\ln x_0)^2$

$g'(x)=-\dfrac{1}{2}x_0\cdot\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{2}\ln x_0+\dfrac{1}{2}(\ln x_0)^2+\dfrac{1}{2}x_0\cdot 2x_0\cdot 2\ln x_0=\dfrac{1}{2}(\ln x_0)^2+\dfrac{1}{2}\ln x_0-\dfrac{1}{2}$

令 $t=\ln x_0$，（$t<0$），$f(t)=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}=0$　解得 $t_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}>0$（舍去），$t_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $f(t)$在$\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$单调递增，在$\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},0\right)$上单调递减

$\therefore$当$\ln x_0=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$时，$g(x)$最大，即$\triangle AOP$面积最大故点$P$的纵坐标为$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 故选：C.

二、多选题（本大题共4小题，共20分）

9. A、B、C、D、E五个人并排站在一起，则下列说法正确的有（　　）

A．若A、B不相邻共有72种方法

B．若A不站在最左边，B不站最右边，有78种方法.

C．若A在B左边有60种排法

D．若A、B两人站在一起有24种方法

【答案】ABC

【详解】对于A：若A、B不相邻共有$A_3^3\cdot A_4^2=72$种方法，故A正确；

对于B：若A不站在最左边，B不站最右边，利用间接法有$A_5^5-2A_4^4+A_3^3=78$种方法，故B正确；

对于C：若A在B左边有$\dfrac{A_5^5}{A_2^2}=60$种方法，故C正确；

对于D：若A、B两人站在一起有$A_4^4A_2^2=48$，故D不正确.

故选：ABC

10. 点P在圆$C_1:x^2+y^2=1$上，点Q在圆$C_2:x^2+y^2-6x+8y+24=0$上，则（　　）

A．$|PQ|$的最小值为0

B．$|PQ|$的最大值为7

C．两个圆心所在的直线斜率为$-\dfrac{4}{3}$

D．两个圆相交弦所在直线的方程为$6x-8y-25=0$

【答案】BC

【解析】解：根据题意，圆$C_1:x^2+y^2=1$，其圆心$C_1(0,0)$，半径$R=1$，

圆$C_2:x^2+y^2-6x+8y+24=0$，即$(x-3)^2+(y+4)^2=1$，其圆心$C_2(3,-4)$，半径$r=1$，

圆心距$|C_1C_2|=\sqrt{16+9}=5$，则$|PO|$的最小值为$|C_1C_2|-R-r=3$，最大值为$|C_1C_2|+R+r=7$，故A错误，B正确；

对于 C，圆心 $C_1(0,0)$，圆心 $C_2(3,-4)$，则两个圆心所在的直线斜率 $k=\frac{-4-0}{3-0}=-\frac{4}{3}$，C 正确，

对于 D，两圆圆心距 $|C_1C_2|=5$，有 $|C_1C_2|>R+r=2$，两圆外离，不存在公共弦，D 错误.

故选：BC.

11. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2+3a_n}(n\in N^*)$，则下列结论正确的是( )

A. $\left\{\frac{1}{a_n}+3\right\}$为等比数列

B. $\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$

C. $\{a_n\}$为递增数列

D. $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n=2^{n+2}-7n$

【答案】*AB*

【解答】解：因为$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2+3a_n}{a_n}=\frac{2}{a_n}+3$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}+3=2\left(\frac{1}{a_n}+3\right)$，

又因为$\frac{1}{a_1}+3=4\neq 0$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}+3\right\}$是以4为首项，2为公比的等比数列，所以 *A* 正确；

因为$\frac{1}{a_n}+3=4\times 2^{n-1}$，所以$a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$，所以$\{a_n\}$为递减数列，所以 *B* 正确，*C* 错误；

因为$a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$，所以$\frac{1}{a_n}=2^{n+1}-3$，

所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n=(2^2-3)+(2^3-3)+\ldots+(2^{n+1}-3)=2(2^1+2^2+\ldots+2^n)-3n$

$=2\times\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-3n=2^{n+2}-3n-4$，所以 *D* 错误．故选 *AB*.

12. 关于函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，下列说法正确的是（　　）

A． $x_0=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点；

B． 函数 $y=f(x)-x$ 有且只有 1 个零点；

C． 存在正整数 k，使得 $f(x)>kx$ 恒成立；

D． 对任意两个正实数 x_1，x_2，且 $x_1\neq x_2$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>4$.

【答案】ABD

【解析】对于 A 选项，函数的的定义域为$(0,+\infty)$，函数的导数 $f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x^2}$ ，

$\therefore$ $x\in(0,2)$时， $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减， $x\in(2,+\infty)$时， $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

$\therefore x=2$是$f\left(x\right)$的极小值点，故 A 正确；对于 B 选项，$y=f\left(x\right)-x=\frac{2}{x}+\ln x-x$，

$\therefore$ $y'=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}}{x^2}<0$，$\therefore$ 函数在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，

又$\because$ $f\left(1\right)-1=2+\ln 1-1=1>0$，$f\left(2\right)-2=1+\ln 2-2<0$，

$\therefore$ 函数$y=f\left(x\right)-x$有且只有 1 个零点，故 B 正确；对于 C 选项，若$f\left(x\right)>kx$，可得$k<\frac{f\left(x\right)}{x}=\frac{2}{x^2}+\frac{\ln x}{x}$，

令$g\left(x\right)=\frac{2}{x^2}+\frac{\ln x}{x}$，则$g'\left(x\right)=\frac{-4+x-x\ln x}{x^3}$，令$h\left(x\right)=-4+x-x\ln x$，则$h'\left(x\right)=-\ln x$，

$\therefore$在$x\in\left(0,1\right)$上，$h'\left(x\right)>0$，函数$h\left(x\right)$单调递增，$x\in\left(1,+\infty\right)$上，$h'\left(x\right)<0$，函数$h\left(x\right)$单调递减，

$\therefore h\left(x\right)\le h\left(1\right)=-3<0$，$\therefore g'\left(x\right)<0$，$\therefore g\left(x\right)=\frac{2}{x^2}+\frac{\ln x}{x}$在$\left(0,+\infty\right)$上函数单调递减，函数无最小值，

$\therefore$不存在正实数k，使得$f\left(x\right)>kx$成立，故 C 错误；

对于 D 选项，由$x_1>x_2$，$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$结合 A 选项可知$x_1>2, 0<x_2<2$，

要证$x_1+x_2>4$，即证$x_1>4-x_2$，且$x_1>4-x_2>2$，由函数$f\left(x\right)$在$x\in\left(2,+\infty\right)$是单调递增函数，

所以有$f\left(x_1\right)>f\left(4-x_2\right)$，由于$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，所以$f\left(x_2\right)>f\left(4-x_2\right)$，即证明$f\left(x\right)>f\left(4-x\right), x\in\left(0,2\right)$，

令$m\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(4-x\right)=\ln x-\ln\left(4-x\right)+\frac{2}{x}-\frac{2}{4-x}, x\in\left(0,2\right)$，则$m'\left(x\right)=\frac{-8\left(x-2\right)^2}{x^2\left(4-x\right)^2}<0$，所以$m\left(x\right)$在$\left(0,2\right)$

是单调递减函数，所以$m\left(x\right)>m\left(2\right)=0$，即$f\left(x\right)>f\left(4-x\right), x\in\left(0,2\right)$成立，

故$x_1+x_2>4$成立，所以 D 正确.故选：ABD.

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20 分）

13. 3 个学生和 3 个老师共 6 个人站成一排照相，有且仅有两个老师相邻，则不同站法的种数是_______（结果用数字表示）.

【答案】432

【解析】根据题意，分 3 步进行分析：

①将 3 个老师分成 2 组，有C_3^2种分组方法，将 2 人的一组看成一个元素，考虑 2 人之间的顺序，有$C_3^2A_2^2$种情况；

②将剩余的 3 个学生全排列，有A_3^3种排法，排好后，有 4 个空位；

③在 4 个空位中任选 2 个，安排 3 个老师分成的两个组，有 A_4^2 种方法，

则 6 人站成一排照相，3 个老师中有且只有两个老师相邻的站法有 $C_3^2A_2^2A_3^3A_4^2=432$ 种.故答案为：432.

14. 已知函数 $f(x)=e^x\ln x$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数，则 $f'(1)$的值为________.

【答案】e

【解析】由题意得 $f'(x)=e^x\ln x+e^x\dfrac{1}{x}$，则 $f'(1)=e$.

故答案为：e

15. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$上一点(2，m)到焦点的距离为 4，准线为 l．若 l 与双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线所围成的三角形面积为 $2\sqrt{2}$，则双曲线 C 的渐近线方程为_________.

【答案】$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

【解析】依题意，抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$准线 l： $x=-\dfrac{p}{2}$，

由抛物线定义知 $2-(-\dfrac{p}{2})=4$，解得 $p=4$，则准线 l： $x=-2$，

双曲线 C 的两条渐近线为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，于是得准线 l 与两渐近线交点为 $A(-2,\dfrac{2b}{a}),B(-2,-\dfrac{2b}{a})$，

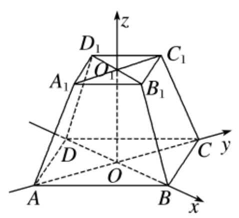
原点为 O，则 $\triangle AOB$ 面积 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot 2=\dfrac{4b}{a}=2\sqrt{2}$，

解得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.故答案为： $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

16. 16. 已知在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1，下底面 $ABCD$ 的边长为 2，侧棱与底面所成的角为 60°，则异面直线 AD_1 与 B_1C 所成的角的余弦值为________.

答案 $\dfrac{1}{4}$

解析 设上、下底面中心分别为 O_1，O，则 OO_1⊥平面 $ABCD$，以 O 为原点，直线 BD，AC，OO_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系.



因为 $AB=2$，$A_1B_1=1$，所以 $AC=BD=2\sqrt{2}$，$A_1C_1=B_1D_1=\sqrt{2}$.因为平面 $BDD_1B_1\perp$平面 $ABCD$，

所以$\angle B_1BO$为侧棱与底面所成的角，故$\angle B_1BO=60°$.设棱台高为 h，则 $\tan 60°=\dfrac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$h=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 $A(0，-\sqrt{2}，0)$，$D_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}，0，\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$B_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}，0，\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$C(0，\sqrt{2}，0)$，

所以$\overrightarrow{AD_1}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}，\sqrt{2}，\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$\overrightarrow{B_1C}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}，\sqrt{2}，-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，故 $\cos\langle\overrightarrow{AD_1}，\overrightarrow{B_1C}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{B_1C}}{|\overrightarrow{AD_1}||\overrightarrow{B_1C}|}=\dfrac{1}{4}$，

故异面直线 AD_1 与 B_1C 所成的角的余弦值为$\dfrac{1}{4}$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17．已知$\{a_n\}$为等差数列，各项为正的等比数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，且$2a_1=b_1=2$，$a_2+a_8=10$，______.

在①$\lambda S_n=b_n-1(\lambda\in R)$；②$a_4=S_3-2S_2+S_1$；③$b_n=2^{\lambda a_n}(\lambda\in R)$.

这三个条件中任选其中一个，补充在上面的横线上，并完成下面问题的解答

(如果选择多个条件解答，则按选择第一个解答计分).

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和T_n.

【答案】解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

$\because 2a_1=2$，$a_2+a_8=10$，$\therefore 2a_1+8d=10$，$\therefore a_1=1$，$d=1$，

$\therefore a_n=1+(n-1)\times 1=n$，

选①：

(1)由$b_1=2$，$\lambda S_n=b_n-1$，

当$n=1$时，有$\lambda S_1=\lambda b_1=b_1-1$，即$2\lambda=2-1$，解得：$\lambda=\frac{1}{2}$，

当$n\geq 2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=2(b_n-1)-2(b_{n-1}-1)$，即$b_n=2b_{n-1}$，

所以$\{b_n\}$是一个以2为首项，2为公比的等比数列，

$\therefore b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$；

(2)由(1)知：$a_n+b_n=n+2^n$，

$\therefore T_n=(1+2+3+...+n)+(2+2^2+2^3+...+2^n)$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2+\dfrac{n(n+1)}{2}$.

选②：

(1)设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，则$q>0$，

依题意得$a_4=(S_3-S_2)-(S_2-S_1)=b_3-b_2=b_1(q^2-q)=4$，

$\because b_1=2$，$\therefore 2(q^2-q)=4$，解得$q=2$或$q=-1$(舍)，

$\therefore b_n=2^n$；

(2)由(1)知：$a_n+b_n=n+2^n$，

$\therefore T_n=(1+2+3+...+n)+(2+2^2+2^3+...+2^n)$

$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2+\frac{n(n+1)}{2}$.

选③：

(1) $\because b_n=2^{\lambda a_n}(\lambda\in R)$，$2a_1=b_1=2$，

令$n=1$，得：$b_1=2^{\lambda a_1}$，即$2=2^{\lambda}$，$\therefore \lambda=1$，$\therefore b_n=2^{a_n}$，

$\because a_n=n$，$\therefore b_n=2^n$；

(2)由(1)知：$a_n+b_n=n+2^n$，

$\therefore T_n=(1+2+3+...+n)+(2+2^2+2^3+...+2^n)$

$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2+\frac{n(n+1)}{2}$.

【解析】本题主要考查等差、等比数列基本量的计算、通项公式的求法及分组求和在数列求和中的应用，属于基础题.

(1)由题设条件求出等差数列的公差与等比数列的公比，即可求得其通项公式；(2)先由(1)求得a_n+b_n，再利用分组求和的办法求得前n项和T_n.

18. 已知关于x,y的方程$C:x^2+y^2-2x-4y+m=0$.

（1）若方程C表示圆，求实数m的取值范围；

（2）若圆C与圆$x^2+y^2-8x-12y+36=0$外切，求实数m的值；

（3）若圆C与直线$l:x+2y-4=0$相交于M,N两点，且$|MN|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，求实数m的值.

【答案】（1）$(-\infty,5)$（2）$m=4$（3）$m=4$

（1）解：把方程$C:x^2+y^2-2x-4y+m=0$，配方得：$(x-1)^2+(y-2)^2=5-m$，

若方程C表示圆，则$5-m>0$，解得$m<5$；所以m的取值范围为$(-\infty,5)$.

（2）解：由（1）得圆C的圆心为 $1,2$ ，半径$r=\sqrt{5-m}$

把圆 $x^2+y^2-8x-12y+36=0$ 化为标准方程得：$(x-4)^2+(y-6)^2=16$，得到圆心坐标为 $(4,6)$，半径为 4，

则两圆心间的距离 $d=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=5$，

因为两圆的位置关系是外切，所以 $d=R+r$ 即 $4+\sqrt{5-m}=5$，解得 $m=4$；

（3）解：因为圆 C 的圆心为 $1,2$，则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\left(\sqrt{5-m}\right)^2=\left(\frac{1}{2}|MN|\right)^2+d^2$，即 $5-m=1$，解得 $m=4$.

19. 高二(1)班共有 35 名同学，其中男生 20 名，女生 15 名，今从中选出 3 名同学参加活动.

（1）其中某一女生必须在内，不同的取法有多少种？

（2）其中某一女生不能在内，不同的取法有多少种？

（3）恰有 2 名女生在内，不同的取法有多少种？

（4）至少有 2 名女生在内，不同的取法有多少种？

（5）至多有 2 名女生在内，不同的取法有多少种？

【答案】（1）561 种；（2）5 984 种；（3）2 100 种；（4）2 555 种；（5）6 090 种.

【解析】（1）从余下的 34 名学生中选取 2 名，有 $C_{34}^2=561$(种).∴不同的取法有 561 种；

（2）从 34 名可选学生中选取 3 名，有 C_{34}^3 种；或者 $C_{35}^3-C_{34}^2=C_{34}^3=5984$(种).

∴不同的取法有 5984 种；

（3）从 20 名男生中选取 1 名，从 15 名女生中选取 2 名，有 $C_{20}^1C_{15}^2=2100$(种).

∴不同的取法有 2100 种；

（4）选取 2 名女生有 $C_{20}^1C_{15}^2$ 种，选取 3 名女生有 C_{15}^3 种，共有选取方式 $C_{20}^1C_{15}^2+C_{15}^3=2100+455=2555$ 种；

∴不同的取法有 2555 种.

（5）选取 3 名的总数有 C_{35}^3，因此选取方式共有 $C_{35}^3 - C_{15}^3$ =6545−455=6090(种).

∴不同的取法有 6090 种.

20. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，$AB=BC=2$，E，F 分别为 AC 和 CC_1 的中点，D 为棱 A_1B_1 上的点，$BF\perp A_1B_1$.

（1）证明：$BF\perp DE$；（2）当 B_1D 为何值时，面 BB_1C_1C 与面 DEF 所成的二面角的正弦值最小？

【解析】（1）略

（2）由（1）可知 $AB\perp BF, AB\perp BB_1$，$BF\cap BB_1=B, BF\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1

$\therefore AB\perp$ 平面 BCC_1B_1 且 $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1 $\therefore AB, BC, BB_1$ 两两垂直

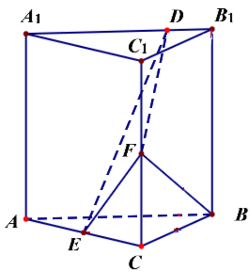
以 AB, BC, BB_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系

设 B_1D 的长度为 a，则 $D(a,0,2), E(1,1,0), F(0,2,1)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,1,1), \overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$

设平面 DEF 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+y+z=0\\ (1-a)x+y-2z=0\end{cases}$，令 $x=3$，解得

$\vec{m}=(3,a+1,2-a)$，由题可知平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$

设平面 BB_1C_1C 与平面 DEF 所成的二面角为 θ，则



$\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2(a-\frac{1}{2})^2+\frac{27}{2}}}$，当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$\cos\theta$ 取得最大值 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，即平面 BB_1C_1C 与平面 DEF 所成的二面角的正弦值最小，最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

21. 已知双曲线 C 过点 $\left(4,\sqrt{3}\right)$，且渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$，直线 l 与曲线 C 交于点 M、N 两点.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）若直线 l 过点 $(1,0)$，问在 x 轴上是否存在定点 Q，使得 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}$ 为常数？若存在，求出点坐标及此常数的值；若不存在，说明理由.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}-y^2=1$；（2）存在；$Q(\frac{23}{8},0)$；$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=\frac{273}{64}$.

【解析】（1）∵双曲线 C 过点 $(4,\sqrt{3})$，且渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，

∴$\begin{cases}\frac{16}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1\\ \frac{b}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}$，解得 $b^2=1,a^2=4$，∴双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$；

（2）设直线 l 的方程为 $x=my+1$，设定点 $Q(t,0)$

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1\\ x=my+1\end{cases}$，消 x 可得 $\left(m^2-4\right)y^2+2my-3=0$，

∴ $m^2-4\neq 0$，且 $\Delta=4m^2+12\left(m^2-4\right)>0$，解得 $m^2>3$ 且 $m^2\neq 4$，

设 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，

∴ $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2-4},y_1y_2=-\frac{3}{m^2-4}$，∴ $x_1+x_2=m\left(y_1+y_2\right)+2=-\frac{2m^2}{m^2-4}+2=\frac{-8}{m^2-4}$，

$x_1x_2=\left(my_1+1\right)\left(my_2+1\right)=m^2y_1y_2+m\left(y_1+y_2\right)+1=-\frac{3m^2}{m^2-4}-\frac{2m^2}{m^2-4}+1=-\frac{4m^2+4}{m^2-4}$

$=-4-\frac{20}{m^2-4}$ ∴ $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=\left(x_1-t,y_1\right)\left(x_2-t,y_2\right)=\left(x_1-t\right)\left(x_2-t\right)+y_1y_2$

$=x_1x_2-t\left(x_1+x_2\right)+t^2+y_1y_2=-4-\frac{20}{m^2-4}+t\cdot\frac{8}{m^2-4}-\frac{3}{m^2-4}+t^2=-4+t^2+\frac{8t-23}{m^2-4}$ 为常数，与 m 无关.∴ $8t-23=0$，解得 $t=\frac{23}{8}$. 即 $Q(\frac{23}{8},0)$，此时 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=\frac{273}{64}$.

22. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+2)x+2a\ln x(a>0),g(x)=f(x)+2x$.

（1）若 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，函数 $f(x)$ 的极小值为 $h(a)$.

①求实数 a 的取值范围及 $h(a)$ 的表达式；

②记 M 为 $h(a)+a$ 的最大值，求证：$M>\frac{\mathrm{e}^2}{2}-2\mathrm{e}$（e=2.71828⋯是自然对数的底）.

（2）若 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个极值点 $x_1,x_2,x_1<x_2$.求证：$g(x_2)<0$.

【答案】（1）①$a\in(2,+\infty)$，$h(a)=-\frac{a^2}{2}-2a+2a\ln a$；②证明见解析（2）证明见解析

解：①$\because f'(x)=x-(a+2)+\frac{2a}{x}$，$=\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x}=\frac{(x-2)(x-a)}{x}$，

$\therefore f'(x)=0$，解得$x_1=2,x_2=a$，又 $\because$ $x=2$为极大值点，则$a>2$，$\therefore a\in(2,+\infty)$；

此时，当$2<x<a$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(2,a)$上递减，

当$x>a$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(a,+\infty)$上递增，所以当$x=a$时，函数$f(x)$取得极小值，

所以$h(a)=f(x)_{极小值}=f(a)=-\frac{a^2}{2}-2a+2a\ln a$．

②由①知$h(a)+a=f(a)=-\frac{a^2}{2}-a+2a\ln a(a>2)$，令$\varphi(x)=-\frac{x^2}{2}-x+2x\ln x(x>2)$，

则$\varphi'(x)=-x+1+2\ln x(x>2)$，$\varphi''(x)=-1+\frac{2}{x}<0$，所以$\varphi'(x)$在$(2,+\infty)$上递减，

又$\varphi'(e)=3-e>0,\varphi'(e^2)=5-e^2<0$，所以存在$x_0\in(e,e^2)$，有$\varphi'(x_0)=-x_0+1+2\ln x_0=0$，

即$\ln x_0=\frac{x_0-1}{2}$，且$\varphi(x)$在$(2,x_0)$上递增，在$(x_0,+\infty)$上递减，

所以$M=\varphi(x_0)=-\frac{x_0^2}{2}-x_0+2x_0\ln x_0=-\frac{x_0^2}{2}-x_0+2x_0\frac{x_0-1}{2}=\frac{x_0^2}{2}-2x_0$，因为$x_0\in(e,e^2)$，所以$M>\frac{e^2}{2}-2e$；

（2）$g(x)=f(x)+2x=\frac{1}{2}x^2-ax+2a\ln x$，$g'(x)=f(x)+2x=x-a+\frac{2a}{x}=\frac{x^2-ax+2a}{x}$，

由$\Delta=a^2-8a>0$，得$a>8$，则$x_1,x_2(x_1<x_2)$是方程$x^2-ax+2a=0$的两个根，

所以$2x_2>x_1+x_2=a>8$，则$x_2>4$，且由$x_2^2-ax_2+2a=0$，得$a=\frac{x_2^2}{x_2-2}$，

$\therefore g(x_2)=-\frac{x_2^2}{2}-ax_2+2a\ln x_2=-\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_2^3}{x_2-2}+2\frac{x_2^2}{x_2-2}\ln x_2$，$\therefore g(x_2)<0$，即为$-\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_2^3}{x_2-2}+2\frac{x_2^2}{x_2-2}\ln x_2<0$，

即为$-\frac{1}{2}-\frac{x_2}{x_2-2}+\frac{2\ln x_2}{x_2-2}<0$，即为$2\ln x_2-\frac{1}{2}x_2-1<0$，

令$r(x)=2\ln x_2-\frac{1}{2}x_2-1$，则$r'(x)=\frac{2}{x_2}-\frac{1}{2}<\frac{2}{4}-\frac{1}{2}=0$，所以$r(x)$在$(4,+\infty)$上递减，

则$r(x)<r(4)=2\ln 4-3=\ln\frac{16}{e^3}<\ln 1=0$，即$2\ln x_2-\frac{1}{2}x_2-1<0$，所以$g(x_2)<0$．