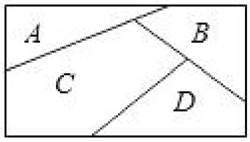
一、单选题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

1. 将 5 种不同的花卉种植在如图所示的四个区域中，每个区域种植一种花卉，且相邻区域花卉不同，则不同的种植方法种数是(   ).



A. 420　　B. 180　　C. 64　　D. 25

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查两个计数原理的应用，属于中档题.

由于规定一个区域只涂一种颜色，相邻的区域颜色不同，可分步进行，区域A有 5 种涂法，B有 4 种涂法，讨论A，D同色和不同色，根据两个计数原理计算可得结论.

【解答】

解：由题意，由于规定一个区域只涂一种颜色，相邻的区域颜色不同，可分步进行：

区域A有 5 种涂法，B有 4 种涂法，

A，D不同色，D有 3 种，C有 2 种涂法，有 $5\times4\times3\times2=120$ 种，

A，D同色，D有 1 种涂法，C有 3 种涂法，有 $5\times4\times3=60$ 种，

共有 $120+60=180$ 种不同的涂色方案.

故选：B.

2. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1$，$a_3=3$，$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$，则$a_{10}=(\quad)$

A. 10　　B. 17　　C. 21　　D. 35

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查等差数列的判定和通项公式，属于基础题．

先判断出数列$\{a_n\}$为等差数列，求出公差，进而可求a_{10}．

【解答】

解：由$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$，可得$2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$，

所以数列$\{a_n\}$为等差数列，

因为$a_1=-1$，$a_3=3$，所以公差$d=2$，

所以$a_{10}=a_1+9d=17$．

故选：B．

3．若过点$P(1-a,1+a)$和$Q(3,2a)$的直线的倾斜角为钝角，则实数a的取值范围是（　）

A. $(-2,1)$　　B. $(-1,2)$

C. $(-\infty,0)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题主要考查了倾斜角与斜率关系，中档题．

根据题意，可得直线的斜率小于0，进而求得结果．

【解答】

解：∵过点$P(1-a,1+a)$和$Q(3,2a)$的直线的倾斜角为钝角，

∴直线的斜率小于0，即$\frac{2a-a-1}{3-1+a}<0$．

$$\therefore (a-1)(a+2)<0$$

$$\therefore -2<a<1$$

故选A．

4. 在平面直角坐标系xOy中，已知圆O：$x^2+y^2=1$，点$B(2,0)$，过动点P引圆O的切线，切点为T，若$PT=\sqrt{2}PB$，则PB长的最大值为( )

A. $2+\sqrt{7}$　　B. $-2+\sqrt{7}$　　C. $4+\sqrt{10}$　　D. $4-\sqrt{10}$

【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查了圆的切线性质，圆内点到圆上距离的最大值的求解，属于中档题.

由已知$PT=\sqrt{2}PB$，结合圆的切线性质可求P的轨迹方程，然后结合圆的性质即可求解PB的最大值.

【解答】

解：设$P(x,y)$，

因为PT与圆相切，T为切点，$PT=\sqrt{2}PB$，

故$PT^2=2PB^2$，

所以$PO^2-1=2PB^2$，

所以$x^2+y^2-1=2(x-2)^2+2y^2$，

整理得$(x-4)^2+y^2=7$，

所以P的轨迹是以$(4,0)$为圆心，以$\sqrt{7}$为半径的圆，$B(2,0)$在圆内，

所以PB长的最大值为$2+\sqrt{7}$.

故选A.

5. 已知$A(1,0,0)$，$B(0,-1,1)$，$\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为120°，则$\lambda$的值为( )

A. $\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　C. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\pm\sqrt{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查空间向量的数量积，空间向量的模及夹角的运算，属于中档题.

表示出$\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$的坐标，根据$\cos 120^\circ=\frac{2\lambda}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\lambda^2+1}}=-\frac{1}{2}$求解即可.

【解答】

解：因为$\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=(1,0,0)+\lambda(0,-1,1)=(1,-\lambda,\lambda)$，

所以$|\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1+2\lambda^2}$，

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}$，

$(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OB}=2\lambda$,

所以 $\cos 120°=\frac{2\lambda}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\lambda^2+1}}=-\frac{1}{2}$,

所以$\lambda<0$,

且 $4\lambda=-\sqrt{4\lambda^2+2}$

解得：$\lambda=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

故选 C.

6. 已知椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，斜率为 2 的直线与椭圆相交于两点$M$，$N$，$MN$的中点坐标为$(1,-1)$，则椭圆$C$的离心率是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查椭圆的性质和中点弦问题，考查学生的计算能力，属于中档题.

利用点差法，结合MN的中点坐标，以及直线的斜率为 2，即可求出$a=\sqrt{2}b$，$c=b$，从而可得椭圆C的离心率.

【解答】

解：设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$\frac{y_1^2}{a^2}+\frac{x_1^2}{b^2}=1$ ①，$\frac{y_2^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$ ②，

$\because MN$的中点坐标为$(1,-1)$，

$\therefore\frac{x_1+x_2}{2}=1$，$\frac{y_1+y_2}{2}=-1$，

$\because$直线MN的方程是$y=2(x-1)-1$，

$\therefore y_1-y_2=2(x_1-x_2)$，

①②两式相减可得：$\frac{y_1^2-y_2^2}{a^2}+\frac{x_1^2-x_2^2}{b^2}=0$，

$\therefore\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{a^2}+\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{b^2}=0$，

$\therefore 2\times\frac{y_1-y_2}{a^2}+(-2)\times\frac{x_1-x_2}{b^2}=0$，

$\therefore 2\times 2\times\frac{x_1-x_2}{a^2}-2\times\frac{x_1-x_2}{b^2}=0$，

$\therefore\frac{4}{a^2}-\frac{2}{b^2}=0$，

$\therefore a=\sqrt{2}b$，

$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=b$，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案选 B.

二、多选题（本大题共 2 小题，共 10.0 分）

7. 下列利用方向向量、法向量判断线、面位置关系的结论中，正确的是(   )

   A. 两条不重合直线l_1，l_2的方向向量分别是$\vec{a}=(2,3,-1)$，$\vec{b}=(-2,-3,1)$，则$l_1//l_2$

   B. 直线l的方向向量$\vec{a}=(1,-1,2)$，平面α的法向量是$\vec{u}=(6,4,-1)$，则$l\perp\alpha$

   C. 两个不同的平面α，β的法向量分别是$\vec{u}=(2,2,-1)$，$\vec{v}=(-3,4,2)$，则$\alpha\perp\beta$

   D. 直线l的方向向量$\vec{a}=(0,3,0)$，平面α的法向量是$\vec{u}=(0,-5,0)$，则$l//\alpha$

【答案】AC

【解析】

【分析】

本题考查了利用空间向量判断直线与平面以及平面与平面的位置关系应用问题，属于中档题.

A中，根据两条不重合直线方向向量共线，判断两直线平行；

B中，根据直线的方向向量与平面的法向量垂直，判断直线与平面平行或在平面内；

C中，根据两个不同的平面法向量垂直，判断两平面垂直；

D中，根据直线的方向向量与平面的法向量共线，判断直线与平面垂直.

【解答】

解：对于A，两条不重合直线l_1，l_2的方向向量分别是$\vec{a}=(2,3,-1)$，$\vec{b}=(-2,-3,1)$，

且$\vec{b}=-\vec{a}$，所以$l_1//l_2$，选项 A 正确；

对于B，直线l的方向向量$\vec{a}=(1,-1,2)$，平面α的法向量是$\vec{u}=(6,4,-1)$，

且$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times6-1\times4+2\times(-1)=0$，所以$l//\alpha$或$l\subset\alpha$，判断选项 B 错误；

对于C，两个不同的平面α，β的法向量分别是$\vec{u}=(2,2,-1)$，$\vec{v}=(-3,4,2)$，

且$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times(-3)+2\times4-1\times2=0$，所以$\alpha\perp\beta$，选项 C 正确；

对于D，直线l的方向向量$\vec{a}=(0,3,0)$，平面α的法向量是$\vec{u}=(0,-5,0)$，

且$\vec{u}=-\frac{5}{3}\vec{a}$，所以$l\perp\alpha$，选项$D$错误．

故选：AC．

8. 已知曲线C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{m}=1$，$F_1$，$F_2$分别为曲线$C$的左、右焦点，则下列说法正确的是（ ）

A. 若$m=-3$，则曲线C的两条渐近线所成的锐角为$\frac{\pi}{3}$

B. 若曲线C的离心率$e=2$，则$m=-27$

C. 若$m=3$，则曲线C上不存在点P，使得$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$

D. 若$m=3$，P为C上一个动点，则$\triangle PF_1F_2$面积的最大值为$3\sqrt{2}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】

本题考查椭圆与双曲线的几何性质，考查运算求解能力，属于中档题．

当$m=-3$时，求出双曲线的渐近线的倾斜角判断A；由双曲线的离心率为2，求解m值判断B；当$m=3$时，求出椭圆的焦点坐标，设P的坐标，利用数量积可以等于0判断C；直接求出焦点三角形面积的最大值判断D．

【解答】

解：对于A，当$m=-3$时，双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$，

所以$a=3$，$b=\sqrt{3}$，所以双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

渐近线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$的倾斜角为$\frac{\pi}{6}$，

则曲线C的两条渐近线所成的锐角为$\frac{\pi}{3}$，故A正确；

对于B，若曲线C的离心率$e=2>1$，可知曲线一定是双曲线，则$\frac{c}{a}=2$，$m<0$，

此时$a^2=9$，$b^2=-m$，则$\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{m}{9}}=2$，解得$m=-27$.故$B$正确；

对于C，当$m=3$时，曲线方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$，表示焦点在$x$轴上的椭圆，

此时$a^2=9$，$b^2=3$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{6}$，则$F_1(-\sqrt{6},0)$，$F_2(\sqrt{6},0)$，

设$P(x,y)$，则$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$，

$$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{6}-x,-y)\cdot(\sqrt{6}-x,-y)=x^2+y^2-6$$

$=x^2+3-\frac{x^2}{3}-6=\frac{2}{3}x^2-3$，

$\because -3 \leq x \leq 3$，$\therefore \frac{2}{3}x^2-3\in[-3,3]$，且当$x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，满足$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，

故 C 错误；

对于D，当$m=3$ 时，曲线方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$，表示焦点在$x$轴上的椭圆，

此时$a^2=9$，$b^2=3$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{6}$，则$F_1(-\sqrt{6},0)$，$F_2(\sqrt{6},0)$，

$\triangle PF_1F_2$面积的最大值为$\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=bc=3\sqrt{2}$，故 D 正确．

故选：ABD．

三、单空题（本大题共 2 小题，共 10.0 分）

9.　等比数列$\{a_n\}$中，S_n表示前n项和，$a_3=2S_2+1,a_4=2S_3+1$，则公比q为______．

【答案】3

【解析】

【分析】

本题考查了等比数列的通项公式，

利用基本量a_1，q表示等比数列的项或和.得到$a_1q^3=3a_1q^2$，得到公比．

【解答】

解：$\because a_3=2S_2+1$，$a_4=2S_3+1$，

$\therefore$两式相减可得，$a_4-a_3=2(S_3-S_2)=2a_{3,}$

$\therefore$整理可得，$a_4=3a_{3,}$

$\therefore$利用等比数列的通项公式可得，$a_1q^3=3a_1q^2$，

$\because a_1\neq 0$，$q\neq 0$，

$\therefore q=3$．

故答案为 3．

10. 若函数$f(x)=e^x-2x$图象在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为$y=kx+b$，则$k-b$的最小值为______．

【答案】$-2-\frac{1}{e}$

【解析】

【分析】

本题考查导数的几何意义，利用导数研究函数的单调性和极值，解题的关键是正确求导，由题意，利用导数求出函数$f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$的切线方程，与已知切线方程对比即可得到k和b的值，进而得到$k-b=e^{x_0}x_0-2$，再利用导数研究其单调性和极值即可求解本题.

【解答】

解：由题意，切点为$(x_0,e^{x_0}-2x_0)$，$f'(x)=e^x-2$，所以$f'(x_0)=e^{x_0}-2$，

则$f(x)$图象在$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率为$k=e^{x_0}-2$，

则所求切线方程为$y=(e^{x_0}-2)(x-x_0)+e^{x_0}-2x_0$，即$y=(e^{x_0}-2)x-e^{x_0}x_0+e^{x_0}$，

所以$k=e^{x_0}-2$，$b=-e^{x_0}x_0+e^{x_0}$，则$k-b=e^{x_0}x_0-2$，

令$g(x)=xe^x-2$，则$g'(x)=e^x(x+1)$，

当$x<-1$时，$g'(x)<0$，当$x>-1$时，$g'(x)>0$，

所以函数$g(x)=xe^x-2$在$x=-1$处取得极小值，亦即最小值，

所以$k-b$的最小值为$-2-\frac{1}{e}$.

故答案为$-2-\frac{1}{e}$.

四、解答题（本大题共2小题，共24.0分）

11．设抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，过F且斜率为$k(k>0)$的直线l与C交于A，B两点，$|AB|=8$.

(1)求l的方程；

(2)求过点A，B且与C的准线相切的圆的方程.

【答案】解：(1)抛物线C：$y^2=4x$的焦点为$F(1,0)$，

由题意可知直线AB的方程为：$y=k(x-1)$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$\begin{cases}y=k(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$，整理得：$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$，

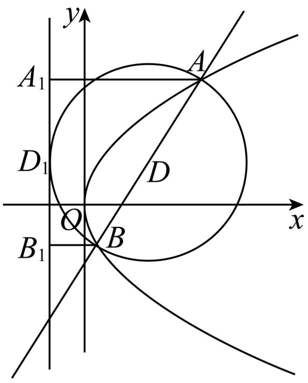
则$x_1+x_2=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$，$x_1x_2=1$，

由$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2(k^2+2)}{k^2}+2=8$，

得：$k^2=1$，$k>0$，

则$k=1$，

$\therefore$直线l的方程$y=x-1$；



(2)由(1)可得AB的中点坐标为$D(3,2)$，

则直线AB的垂直平分线方程为$y-2=-(x-3)$，即$y=-x+5$，

设所求圆的圆心坐标为(x_0,y_0)，

则$\begin{cases} y_0=-x_0+5 \\ (x_0+1)^2=\frac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} x_0=3 \\ y_0=2 \end{cases}$或$\begin{cases} x_0=11 \\ y_0=-6 \end{cases}$，

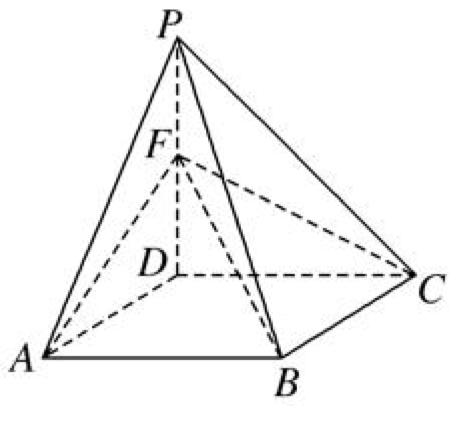
因此，所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$．

【解析】本题考查抛物线的性质，直线与抛物线的位置关系，抛物线的焦点弦公式，考查圆的标准方程，考查转换思想，属于中档题．

(1)设直线AB的方程为$y=k(x-1)$，代入抛物线方程，根据抛物线的焦点弦公式即可求得k的值，即可求得直线l的方程；

(2)设圆心坐标为(x_0,y_0)，结合题意构建方程，求得圆的方程．

12. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为 2 的菱形，$\angle DAB=60°$，$PD\perp$底面$ABCD$，点F为棱PD的中点，二面角$D-FC-B$的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$．

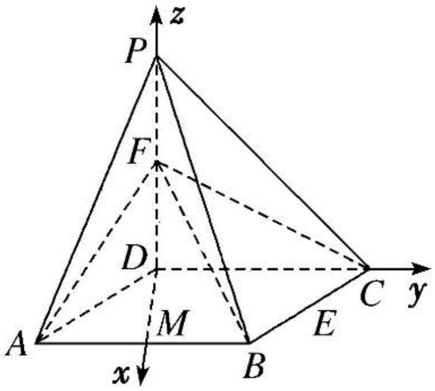


(1)求PD的长；

(2)求异面直线BF与PA所成角的余弦值；

(3)求直线AF与平面BCF所成角的正弦值．

【答案】解：



(1)取AB中点M，以D为坐标原点，分别以DM，DC，DP所在直线为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系，如图所示.

设$FD=a$，则$D(0,0,0)$，$F(0,0,a)$，$C(0,2,0)$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$A(\sqrt{3},-1,0)$.

所以$\overrightarrow{FC}=(0,2,-a)$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},-1,0)$.

设平面FBC的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$.

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{FC}=2y-az=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{3}x-y=0,\end{cases}$取$x=1$，得$\vec{m}=(1,\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{a})$，

取平面DFC的一个法向量为$\vec{n}=(1,0,0)$.

由题意，$|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}|=\frac{1}{\sqrt{1+3+\frac{12}{a^2}}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，解得$a=\sqrt{6}$.

所以$PD=2FD=2\sqrt{6}$.

(2)$P(0,0,2\sqrt{6})$，$\overrightarrow{FB}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{6})$，$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},-1,-2\sqrt{6})$，

设异面直线BF与PA所成的角为θ_1，

则$|\cos\theta_1|=|\cos<\overrightarrow{FB},\overrightarrow{PA}>|=|\frac{\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{FB}||\overrightarrow{PA}|}|=\frac{14}{\sqrt{10}\times\sqrt{28}}=\frac{\sqrt{70}}{10}$，

即异面直线BF与PA所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{70}}{10}$.

(3)$\overrightarrow{FA}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{6})$，设直线$AF$与平面$BCF$所成的角为$\theta_2$，

则$\sin\theta_2=|\cos<\vec{m},\overrightarrow{FA}>|=|\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{FA}}{|\vec{m}||\overrightarrow{FA}|}|=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

即直线AF与平面BCF所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【解析】本题考查异面直线所成的角，考查直线与平面所成的角，考查二面角，考查利用空间向量求线线、线面、面面角，属于中档题.

(1)取AB中点M，以D为坐标原点，分别以DM，DC，DP所在直线为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系，写出坐标，求出平面FBC的一个法向量和平面DFC的一个法向量，代入公式$|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}|$，从而得到$PD$长；

(2)代入公式$|\cos\theta_1| = |\cos < \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{PA} > | = |\frac{\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{FB}||\overrightarrow{PA}|}|$，可得结果.

(3)代入公式 $\sin\theta_2 = |\cos < \overrightarrow{m}, \overrightarrow{FA} > | = |\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{FA}|}|$，可得结果.