

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习 (19)

班级_____ 姓名_____ 学号 _____

1. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知的椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右顶点分别是 A ,

B , 过右焦点 F 的动直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, $\triangle ABM$ 的面积最大值为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设直线 AM 与定直线 $x = t (t > 2)$ 交于点 T , 记直线 TF, AM, BN 的斜率分别是 $k_0, k_1,$

k_2 , 若 k_1, k_0, k_2 成等差数列, 求实数 t 的值.

2. 求 $(x^2 + 3x + 2)^5$ 展开式中含 x 项的系数.

午间练习(19) 答案

$$1.(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1; (2) 4.$$

由题意可知: $A(-a, 0), B(a, 0)$, 设 $M(x_1, y_1)$, 显然 $-b \leq y_1 \leq b$,

$\triangle ABM$ 的面积为: $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot |y_1| \leq ab$, 因为 $\triangle ABM$ 的面积最大值为 $2\sqrt{3}$,

所以 $ab = 2\sqrt{3}$, 又因为椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

$$\text{于是有} \begin{cases} ab = \sqrt{3} \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}, \text{所以椭圆的标准方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$$

由(1)可知: $F(1, 0), A(-2, 0)$, 由题意可知直线 l 斜率不为零, 所以设方程为: $x = my + 1$,

与椭圆方程联立, 得 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my + 1 \end{cases} \Rightarrow (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$, 设 $N(x_2, y_2)$,

所以 $y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$, 直线 AM 的方程为: $\frac{y - y_1}{y_1} = \frac{x - x_1}{x_1 + 2}$, 把 $x = t$ 代入方

程中, 得 $y = \frac{(t+2)y_1}{x_1 + 2}$, 所以 $T(t, \frac{(t+2)y_1}{x_1 + 2})$, 于是 $k_0 = \frac{\frac{(t+2)y_1}{x_1 + 2}}{t - 1} = \frac{(t+2)y_1}{(x_1 + 2)(t - 1)}$, $k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 2}$,

$k_1 = \frac{y_2}{x_2 - 2}$, 因为 k_1, k_0, k_2 成等差数列, 所以 $2k_0 = k_1 + k_2 \Rightarrow 2 \cdot \frac{(t+2)y_1}{(x_1 + 2)(t - 1)} = \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2}$,

化简, 得 $\frac{(t+5)y_1}{(x_1 + 2)(t - 1)} = \frac{y_2}{x_2 - 2}$, 把 $x_1 = my_1 + 1, x_2 = my_2 + 1$ 代入化简, 得

$6my_1 y_2 = (t+5)(y_1 + y_2) + (2t-8)y_2$, 把 $y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$ 代入, 得

$\frac{6m(t-4)}{3m^2 + 4} = (2t-8)y_2$, 因为 $m \in \mathbb{R}$, 所以有 $\begin{cases} t-4=0 \\ 2t-8=0 \end{cases}$, 即 $t=4$.

【答案】 240 因为 $(x^2 + 3x + 2)^5 = [(1+x)(2+x)]^5 = (1+x)^5 (2+x)^5$,

$(1+x)^5$ 的展开式通项为 $A_{r+1} = C_5^r \cdot x^r$, $(2+x)^5$ 的展开式通项为 $B_{k+1} = C_5^k \cdot 2^{5-k} \cdot x^k$, 其中

$(0 \leq r, k \leq 5, r, k \in \mathbb{N})$, 所以, $(1+x)^5 (2+x)^5$ 的展开式通项为 $T_{r+k+1} = C_5^r C_5^k \cdot 2^{5-k} \cdot x^{r+k}$,

由 $r+k=1$ 可得 $\begin{cases} r=0 \\ k=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r=1 \\ k=0 \end{cases}$, 因此, 展开式中含 x 项的系数为 $C_5^0 C_5^1 \cdot 2^4 + C_5^1 C_5^0 \cdot 2^5 = 240$.

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习 (20)

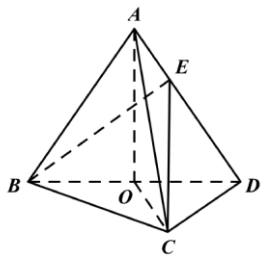
班级_____ 姓名_____ 学号 _____

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{5}{2}ax^2 + 6x + 1$ 在 $x = 2$ 处取得极大值.

(1) 求 a ; (2) 求经过点 $(0, f(0))$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线斜率.

2. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , $AB = AD$, O 为 BD 的中点.

(1) 证明 $OA \perp$ 平面 BCD ; (2) 若 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 E 在棱 AD 上, $DE = 2EA$, 且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45° , 求点 B 到平面 EOC 的距离.



午间练习(20) 答案

1. (1) 由题意可知 $a \neq 0$, $f'(x) = a^2x^2 - 5ax + 6 = (ax-2)(ax-3)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{2}{a}$ 或 $x = \frac{3}{a}$. 当 $a > 0$ 时, $\frac{2}{a} < \frac{3}{a}$, 则 $\frac{2}{a} = 2$, 得 $a = 1$, 所以

$f'(x) = (x-2)(x-3)$, 所以当 $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, $x \in (2, 3)$ 时 $f'(x) < 0$,

即 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 2)$ 和 $(3, +\infty)$, 单调递减区间是 $(2, 3)$, 当 $x = 2$ 时 $f(x)$ 取得

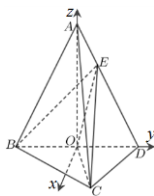
极大值, 满足题意; 当 $a < 0$ 时, $\frac{3}{a} < \frac{2}{a} < 0$, 显然不合题意. 故 $a = 1$. (2) 由 (1) 知

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$, 则 $f(0) = 1$, $f'(x) = x^2 - 5x + 6$. 设切点为 $(x_0, f(x_0))$, 则

$f'(x_0) = x_0^2 - 5x_0 + 6$, 所以切线方程为 $y - \left(\frac{1}{3}x_0^3 - \frac{5}{2}x_0^2 + 6x_0 + 1\right) = (x_0^2 - 5x_0 + 6)(x - x_0)$,

将点 $(0, 1)$ 代入, 得 $\frac{2}{3}x_0^3 - \frac{5}{2}x_0^2 = 0$, 所以 $x_0 = 0$, 或 $x_0 = \frac{15}{4}$. 因为 $f'(0) = 6$, $f'\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{21}{16}$,

所以直线斜率为 6 或 $\frac{21}{16}$.



2. (1) 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB = AD$, O 为 BD 的中

点, 则 $AO \perp BD$, 因平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$, $AO \subset$ 平面 ABD ,

所以 $AO \perp$ 平面 ABD . (2) 因 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形, 又 O 为 BD 的中点, 则

$OC = OB = OD$, 在平面 BCD 内, 过 O 作 $Ox \perp BD$, 由 (1) $B(0, -1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $C(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

设点 $A(0, 0, t)$, 因点 E 在棱 AD 上, $DE = 2EA$, 则 $E(0, \frac{1}{3}, \frac{2t}{3})$, $\overrightarrow{BC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (0, \frac{4}{3}, \frac{2t}{3})$,

设平面 EBC 的一个法向量 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$, 由 , 令 $z_1 = 2$, 得 $\vec{n} = (\sqrt{3}t, -t, 2)$, 平面 BCD 的

法向量 $\overrightarrow{OA} = (0, 0, t)$, $\cos 45^\circ = |\cos \langle \overrightarrow{OA}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{OA}| |\vec{n}|} = \frac{2t}{t\sqrt{4t^2 + 4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $t = 1$, 则

$E(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\overrightarrow{OE} = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\overrightarrow{OC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, 设平面 EOC 的一个法向量 $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}z_2 = 0 \end{cases}$, 令 $z_2 = \sqrt{3}$, 得 $\vec{m} = (2, -2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, 而 $\overrightarrow{OB} = (0, -1, 0)$,

所以点 B 到平面 EOC 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{57}}{19}$.

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习 (21)

班级_____ 姓名_____ 学号 _____

1. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 C 的对称轴都是坐标轴, 且过 $P(2,3)$ 点, P 到双曲线 C 两焦点距离的差的绝对值等于 2.

(1)求双曲线 C 的方程;

(2)如果双曲线 C 的焦点在 x 轴上, 直线 l 经过双曲线 C 的右焦点, 与双曲线 C 交于 A, B 两点, 且 $AB=6$, 求直线 l 的方程.

2. 生命在于运动。某市开展“学生体质健康提升工程”系列活动, 举行一年一度的春季中学生运动会。某校决定从 6 名运动员(含甲、乙运动员)中选 4 人参加 4×100 米接力赛, 在下列条件下, 各有多少种不同的排法?

(1) 甲、乙两人都不入选; (2) 甲、乙两人必须入选, 且跑中间两棒;

(3) 甲不跑第一棒乙不跑第四棒.

3. 设 $(2x + \sqrt{3})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 求下列各式的值:

(1) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$; (2) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$;

(3) $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2$.

午间练习 (21) 答案

①若 C 的焦点在 x 轴上, 设 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

所以 $\begin{cases} 2a = 2, \\ \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = 3, \end{cases}$ 所以双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

②若 C 的焦点在 y 轴上, 设 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

所以 $\begin{cases} 2a = 2, \\ \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 所以双曲线 C 的方程为 $y^2 - 2x^2 = 1$.

故 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 或 $y^2 - 2x^2 = 1$ (2) ①若直线 l 的斜率不存在, 则其方程为 $x = 2$, 代

入 C 方程得 l 与 C 交点坐标为 $(2, -3)$, $(2, 3)$, 则弦长为 6, 符合题意. ②若直线 l 的斜率存

在, 设 $l: y = k(x - 2)$, 联立 $\begin{cases} y = k(x - 2), \\ 3x^2 - y^2 = 3, \end{cases}$ 消去 y 得 $(k^2 - 3)x^2 - 4kx + 4k^2 + 3 = 0$. 所以

$k^2 - 3 \neq 0$ ①, $\Delta = 16k^4 - 4(k^2 - 3)(4k^2 + 3) > 0$ ②, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4k}{k^2 - 3}$,

$x_1 x_2 = \frac{4k^2 + 3}{4k^2 - 3}$, 所以 $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$

$= \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\left(\frac{4k}{k^2 - 3}\right)^2 - \frac{4(4k^2 + 3)}{k^2 - 3}} = 6$. 解得 $k = \pm 1$, 满足 ①②. 所以直线 l 的方程为 $x - y - 2 = 0$,

或 $x + y - 2 = 0$. 综上: 直线 l 的方程为 $x = 2$, 或 $x - y - 2 = 0$, 或 $x + y - 2 = 0$.

2. (1) 24; (2) 24; (3) 252. 解: (3) 一种是若甲跑第四棒, 此时只需在剩下的 5 人中任

选 3 人, 安排在第一、二、三棒即可, 有 $A_5^3 = 60$ 种安排方法, 另一种是若甲不跑第四棒,

此时第四棒由除甲、乙外的另外 4 人中选 1 人跑, 有 A_4^1 种, 第一棒从除甲之外的 4 人中选

1 人跑, 有 A_4^1 种, 在剩下的 4 人中任选 2 人, 安排在第二、三棒, 有 A_4^2 , 则共有 $A_4^1 A_4^1 A_4^2 = 192$,

共有 $60 + 192 = 252$ 种 (1) $97 + 56\sqrt{3}$ (2) $88 + 56\sqrt{3}$ (3) 1 (1) 令 $x = 1$, 即可求

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. (2) 令 $x = 0$, 求得 $a_0 = 9$, 结合

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - a_0$, 即可求解. (3) 令 $x = 1$ 和 $x = -1$, 分别求得

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 和 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4$, 结合

$$(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4), \text{ 即可求解.}$$

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习 (22)

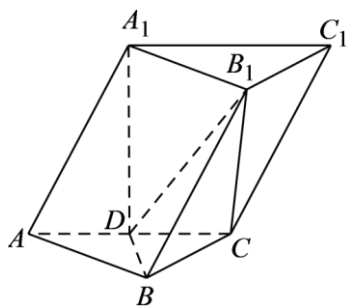
班级_____ 姓名_____ 学号 _____

1. 已知函数 $f(x) = 2\ln x + x^2 - ax$.

(1) 当 $a = 5$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是曲线 $y = f(x)$ 图象上的两个相异的点, 若直线 AB 的斜率 $k > 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

2. 如图所示, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC$, 点 A_1 在平面 ABC 上的射影为线段 AC 的中点 D , 侧面 AA_1C_1C 是边长为 2 的菱形.



(1) 若 $\triangle ABC$ 是正三角形, 求异面直线 DB_1 与 BC 所成角的余弦值;

(2) 当直线 CB_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 时, 求线段 BD 的长.

午间练习 (22) 答案

1.(1)单调递增区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 和 $(2, +\infty)$, 单调递减区间 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$; (2) $a \leq 3$.

(1)当 $a=5$ 时有 $f(x)=2\ln x+x^2-5x$, 则 $f'(x)=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}(x>0)$.

令 $f' \cdot x > 0$ 得: $x > 2$ 或 $0 < x < \frac{1}{2}$, 令 $f' \cdot x < 0$ 得: $\frac{1}{2} < x < 2$.

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 和 $(2, +\infty)$, 单调递减区间 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

(2)由题意, $k=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>1$, 则 $\frac{[f(x_2)-x_2]-[f(x_1)-x_1]}{x_2-x_1}>0$,

令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g'(x)=f'(x)-1 \geq 0$,

$\therefore \frac{2x^2-ax+2}{x}-1 \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq 2x+\frac{2}{x}-1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

而 $2x+\frac{2}{x} \geq 4$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号, $\therefore a \leq 3$.

2. (1)依题意点 A_1 在平面 ABC 上的射影为线段 AC 的中点 D , 所以 $A_1D \perp$ 平面 ABC ,

$A_1D \perp CD, A_1D \perp BD$, 由于 $AB=BC$, 所以 $BD \perp CD$,

以 D 为空间坐标原点建立如图所示空间直角坐标系, $A_1(0, 0, \sqrt{3})$, $C(0, 1, 0)$,

当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时, $B(\sqrt{3}, 0, 0), B_1(\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}), \overline{BC}=(-\sqrt{3}, 1, 0)$.

设直线 DB_1 与 BC 所成角为 α , 则 $\cos \alpha = \frac{|\overline{BC} \cdot \overline{DB_1}|}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{DB_1}|} = \frac{2}{\sqrt{7} \times 2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

(2)设 $DB=t, t>0$, 则 $B(t, 0, 0), B_1(t, 1, \sqrt{3}), \overline{CB_1}=(t, 0, \sqrt{3})$,

$A(0, -1, 0), \overline{AA_1}=(0, 1, \sqrt{3}), \overline{AB}=(t, 1, 0)$, 设平面 ABB_1A_1 的法向量为 $\vec{n}=(x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AA_1} = y + \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AB} = tx + y = 0 \end{cases}$, 故可设 $\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{t}, -\sqrt{3}, 1\right)$, 设直线 CB_1 与平面 ABB_1A_1 所成角为 β ,

则 $\sin \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \overline{CB_1}|}{|\vec{n}| \cdot |\overline{CB_1}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{t^2+3} \times \sqrt{\frac{3}{t^2}+4}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 化简的 $4t^4-13t^2+9=0, (t^2-1)(4t^2-9)=0$,

解得 $t=1$ 或 $t=\frac{3}{2}$ ，也即 $BD=1$ 或 $\frac{3}{2}$ 。

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习（23）

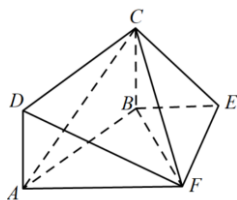
班级_____ 姓名_____ 学号 _____

1. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 经过点 $(1, -1)$ 。

(1) 求抛物线 C 的方程及其焦点坐标；

(2) 过抛物线 C 上一动点 P 作圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 1$ 的一条切线，切点为 A ，求切线长 $|PA|$ 的最小值。

2. 如图，矩形 $ABCD$ 和梯形 $ABEF$ 所在的平面垂直， $BE \parallel AF$ ， $\angle BEF = 90^\circ$ ， $\angle BAF = 30^\circ$ ， $BF = 2$ ， $AF = 4$ 。



(1) 求证： $BF \perp$ 面 $ABCD$ ；

(2) 若直线 AC 与平面 $ABEF$ 所成的角等于 30° ，求钝二面角 $D-CF-E$ 的余弦值。

午间练习 (23) 答案

1.(1) $y^2 = x$, 焦点坐标为 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$; (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1)解: 因为抛物线过点 $(1, -1)$, 所以 $(-1)^2 = 2p$, 解得 $p = \frac{1}{2}$,

所以抛物线 C 的方程为: $y^2 = x$, 焦点坐标为 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$;

(2)解: 设 $P(t^2, t)$, 因为 PA 为圆 M 的切线, 所以 $PA \perp AM$, $|AM| = 1$,

$$\text{所以 } |PA| = \sqrt{|PM|^2 - |AM|^2} = \sqrt{(t^2 - 2)^2 + (t - 0)^2 - 1^2} = \sqrt{t^4 - 3t^2 + 3} = \sqrt{\left(t^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}},$$

所以当 $t^2 = \frac{3}{2}$ 时, 四边形 $|PA|$ 有最小值且最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.(1)证明见解析(2) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ (1)在三角形 ABF 中, 由余弦定理得

$$4 = |AB|^2 + 16 - 2 \times 4 \times |AB| \cdot \cos 30^\circ, \text{ 解得 } |AB| = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } |AB|^2 + |BF|^2 = |AF|^2, \text{ 所以}$$

$BF \perp AB$, 由于平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, 且交线为 AB , 所以 $BF \perp$ 平面 $ABCD$.

(2)依题意 $BC \perp AB$, 由于平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, 且交线为 AB ,

所以 $BC \perp$ 平面 $ABEF$, 所以 $BC \perp AB, BC \perp BF$, 由 (1) 可知 $BF \perp AB$.

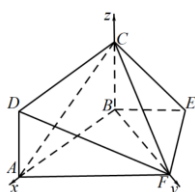
所以 $\angle CAB$ 是直线 AC 与平面 $ABEF$ 所成角, 所以 $\angle CAB = 30^\circ$,

所以 $BC = AB \cdot \tan 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$. 以 B 为空间坐标原点建立如图所示空间直角坐标系,

$$D(2\sqrt{3}, 0, 2), C(0, 0, 2), F(0, 2, 0), E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{CD} = (2\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{CF} = (0, 2, -2), \overrightarrow{CE} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -2\right), \text{ 设平面 } DCF \text{ 的法向量为 } \vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CD} = 2\sqrt{3}x_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CF} = 2y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 故可设 } \vec{n}_1 = (0, 1, 1). \text{ 同理可求得平面 } ECF \text{ 的法向量 } \vec{n}_2 = (-\sqrt{3}, 1, 1),$$

设钝二面角 $D-CF-E$ 为 θ ,  则 $\cos \theta = -\frac{\left| \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \right|}{\left| \vec{n}_1 \right| \cdot \left| \vec{n}_2 \right|} = -\frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$.

