

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第一学期期末模拟试卷 2

高二数学

一. 单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共计 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是正确的. 请把正确答案的选项填涂在答题卡相应位置上.)

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 S_n 为前 n 项和, $2a_7 = a_8 + 5$, 则 S_{11} 的值是()

- A. 55 B. 11 C. 50 D. 60

【答案】A

【解答】解: 由等差数列 $\{a_n\}$ 的性质可得: $a_6 = 2a_7 - a_8 = 5$,

则 $S_{11} = \frac{11(a_1+a_{11})}{2} = 11a_6 = 55$. 故选: A.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $S_n = 2a_{n+1}$, 则 $S_n = ()$

- A. 2^{n-1} B. $\frac{1}{2^{n-1}}$ C. $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ D. $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

【答案】D

【解答】解: 因为 $S_n = 2a_{n+1} = 2(S_{n+1} - S_n)$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{3}{2}$,

则数列 $\{S_n\}$ 是等比数列, 首项为 1, 公比为 $\frac{3}{2}$, 则 $S_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. 故选 D.

3. 若坐标原点在圆 $x^2 + y^2 - 2mx + 2my + 2m^2 - 4 = 0$ 的内部, 则实数 m 的取值范围是()

- A. $(-1, 1)$ B. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ C. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ D. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【答案】D

【解答】解: $\because$ 原点 O 在圆 $x^2 + y^2 - 2mx + 2my + 2m^2 - 4 = 0$ 的内部,

$\therefore 0^2 + 0^2 - 2m \times 0 + 2m \times 0 + 2m^2 - 4 < 0$, 得 $2m^2 < 4$, 解得 $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$,

即实数 m 的取值范围为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. 故选 D.

4. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 准线为 l , P 是 l 上一点, Q 是直线 PF 与 C 的一个交点, 若 $\overrightarrow{FP} = 4\overrightarrow{FQ}$, 则 $|QF| = ()$

- A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. 2

【答案】B

【解答】解: 设 $Q(x_Q, y_Q)$, 因为抛物线 $C: y^2 = 8x$,

故焦点为 $F(2, 0)$, 准线为 $l: x = -2$,

P 是 l 上一点, Q 是直线 PF 与抛物线 C 的一个交点, 故 $P(-2, y_P)$,

则 $\overrightarrow{FP} = (-4, y_P)$, $\overrightarrow{FQ} = (x_Q - 2, y_Q)$,

因为 $\overrightarrow{FP} = 4\overrightarrow{FQ}$ ，则 $-4 = 4(x_Q - 2)$ ，

所以 $x_Q = 1$ ，

将 $x_Q = 1$ 代入抛物线方程，得 $y_Q = \pm 2\sqrt{2}$ ，

则 $|QF| = \sqrt{8+1} = 3$ ，

故选 B.

5. 设 F_1 是双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点， A_1, A_2 是 C 的两个顶点， C 上存在一点 P ，使得 PF_1 与以 A_1A_2 为直径的圆相切于 Q ，且 Q 是线段 PF_1 的中点，则 C 的渐近线方程为()

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \sqrt{3}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm 2x$

【答案】C

【解答】解：不妨记 F_1 是双曲线 C 的下焦点，设 F_2 是双曲线 C 的上焦点，记 A_1 是双曲线 C 的下顶点， A_2 是双曲线 C 的上顶点，

画出如图所示的图象，

由于 O 为 F_1F_2 的中点， Q 为线段 PF_1 的中点，

则由中位线定理可得 $OQ \parallel PF_2$ ， $|OQ| = \frac{1}{2}|PF_2|$ ，

由 PF_1 与以线段 A_1A_2 为直径的圆相切于点 Q ，

则 $|OQ| = a$ ， $|PF_2| = 2a$ ，

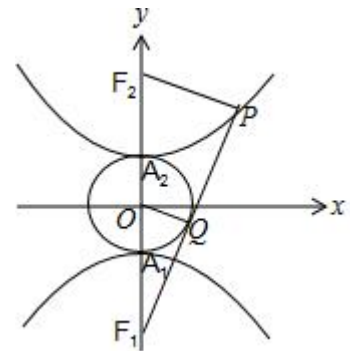
由双曲线的定义可得， $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ ，

即有 $|PF_1| = 4a$ ，则 $QF_1 = 2a$ ，

由 $OQ \perp PF_1$ ，由勾股定理可得 $a^2 + (2a)^2 = c^2$ ，

即 $5a^2 = a^2 + b^2$ ，则 $4a^2 = b^2$ ，即 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ 。

$\therefore C$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{1}{2}x$ 。故选：C。



6. 已知 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 8\ln x$ 在区间 $[m, m+1]$ 上不单调，则实数 m 的取值范围是()

- A. (1,2) B. (3,4) C. (1,2) $\cup$ (3,4) D. (1,2] $\cup$ [3,4)

【答案】C

【解答】解： $\because$ 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 8\ln x$ ，

$\therefore f'(x) = -x + 6 - \frac{8}{x}$ ，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$\because$ 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 8\ln x$ 在 $[m, m+1]$ 上不单调，

$\therefore f'(x) = -x + 6 - \frac{8}{x} = 0$ 在区间 $(m, m+1)$ 上有解,

$\therefore \frac{x^2 - 6x + 8}{x} = 0$ 在 $(m, m+1)$ 上有解,

$\therefore g(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$ 在 $(m, m+1)$ 上有解,

$\therefore$ 由 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 得: $x = 2$ 或 $x = 4$,

$\therefore 2 \in (m, m+1)$ 或 $4 \in (m, m+1)$,

解得: $1 < m < 2$ 或 $3 < m < 4$, 故选 C.

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$, $S_n = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2$ 等于()

- A. $\frac{1}{3}(2^n - 1)$ B. $\frac{1}{5}(1 - 2^{4n})$ C. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$ D. $\frac{1}{3}(1 - 2^n)$

【答案】B

【解答】解: 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$, 可得数列 $\{a_n\}$ 为首项为 1, 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n = 2^{n-1}$, $S_n = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2$

$= 1 - 4 + 16 - 64 + \dots + 4^{2n-2} - 4^{2n-1}$

$= \frac{1 - (-4)^{2n}}{1 - (-4)} = \frac{1}{5}(1 - 4^{2n}) = \frac{1}{5}(1 - 2^{4n})$. 故选 B.

8. 设函数 $f(x)$ 满足 $x^3 f'(x) + 3x^2 f(x) = 1 + \ln x$, 且 $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$, 则 $x > 0$ 时, $f(x)$ ()

- A. 有极大值, 无极小值 B. 有极小值, 无极大值
C. 既有极大值又有极小值 D. 既无极大值也无极小值

【答案】A

【解答】解: 因为 $x^3 f'(x) + 3x^2 f(x) = 1 + \ln x$,

令 $g'(x) = (x^3 f(x))' = 1 + \ln x$,

设 $g(x) = x \ln x + c$,

则 $g(x) = x^3 f(x)$,

所以 $f(x) = \frac{g(x)}{x^3} = \frac{x \ln x + c}{x^3}$,

因为 $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$,

$$\text{所以 } f(\sqrt{e}) = \frac{\sqrt{e}x^{\frac{1}{2}+c}}{e\sqrt{e}} = \frac{1}{2e},$$

解得 $c = 0$,

$$\text{则 } f(x) = \frac{x \ln x}{x^3} = \frac{\ln x}{x^2},$$

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3},$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \sqrt{e}$,

在 $(0, \sqrt{e})$, $f'(x) > 0$, 函数单调递增, $(\sqrt{e}, +\infty)$, $f'(x) < 0$, 函数单调递减,

所以当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 有极大值, 无极小值. 故选 A.

二. 多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分. 请把正确答案的选项填涂在答题卡相应位置上.)

9. 对于函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 下列说法正确的有 ()

A. $f(x)$ 在 $x = e$ 处取得极大值 $\frac{1}{e}$

B. $f(x)$ 有两个不同的零点

C. $f(2) < f(\pi) < f(3)$

D. 若 $f(x) < k - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 则 $k > 1$

【答案】ACD

【解答】解: A、函数的导数 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} (x > 0)$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = e$,

则当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 为增函数,

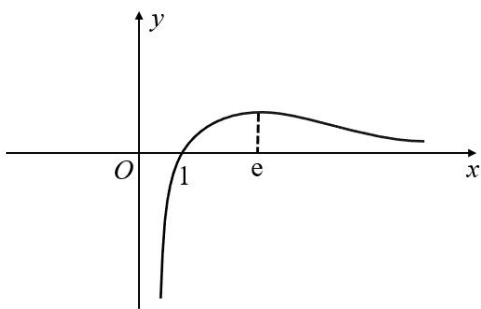
当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 为减函数,

则当 $x = e$ 时, 函数取得极大值, 极大值为 $f(e) = \frac{1}{e}$, 故 A 正确;

B、由 $f(x) = 0$ 得 $\ln x = 0$ 得 $x = 1$,

易知, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$,

又当 $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, 则 $f(x)$ 的图象如图:



由图象可知函数 $f(x)$ 只有一个零点 $x=1$ ，故 B 错误；

$$C、f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = f(2),$$

又当 $x > e$ 时， $f(x)$ 为减函数，所以 $f(3) > f(\pi) > f(4)$ ，

故 $f(2) < f(\pi) < f(3)$ 成立，故 C 正确；

D 、若 $f(x) < k - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，则 $k > \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$ ，

$$\text{设 } h(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}, (x > 0), \text{ 则 } h'(x) = -\frac{\ln x}{x^2},$$

当 $0 < x < 1$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调递增，当 $x > 1$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减，

即当 $x=1$ 时，函数 $h(x)$ 取得极大值同时也是最大值 $h(1)=1$ ，

$\therefore k > 1$ ，故 D 正确。

故选： ACD 。

10. 已知公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ ， S_n 为其前 n 项和，下列说法正确的是()

A. 若 $S_9 < 0$ ， $S_{10} > 0$ ，则 a_6 是数列 $\{a_n\}$ 中绝对值最小的项

B. 若 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{4}$ ，则 $\frac{S_6}{S_{12}} = \frac{1}{4}$

C. 若 $a_1 = 8$ ， $a_4 = 2$ ，则 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_8| = 32$

D. 若 $|a_4| = |a_8|$ ， $d \neq 0$ ，则 $S_{11} = 0$

【答案】BCD

【解答】解： $\{a_n\}$ 为等差数列。

$$A. \text{由} \begin{cases} S_9 < 0 \\ S_{10} > 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} a_1 + a_9 < 0 \\ a_1 + a_{10} > 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} a_5 < 0 \\ a_5 + a_6 > 0 \end{cases}, \therefore |a_6| > |a_5|,$$

$\therefore a_6$ 不是数列 $\{a_n\}$ 中绝对值最小的项，故 A 错误；

B .方法一： $\because \{a_n\}$ 为等差数列， $\therefore S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, S_{12} - S_9$ 为等差数列，

设 $S_3 = x$ ，则 $S_6 = 4x$ ， $\therefore x, 3x, S_9 - 4x, S_{12} - S_9$ 为等差数列，

$$\therefore S_{12} = 16x, \therefore \frac{S_6}{S_{12}} = \frac{4x}{16x} = \frac{1}{4};$$

$$\text{方法二: } \frac{S_3}{S_6} = \frac{3a_1+3d}{6a_1+15d} = \frac{1}{4}, \therefore d = 2a_1, \therefore \frac{S_6}{S_{12}} = \frac{6a_1+15d}{12a_1+66d} = \frac{36a_1}{144a_1} = \frac{1}{4}. \text{故 } B \text{ 正确;}$$

$$C. a_1 = 8, a_4 = 2, \therefore 3d = -6, \therefore d = -2, \therefore a_n = 8 - 2(n-1) = -2n + 10.$$

$$\therefore |a_1| + |a_2| + \dots + |a_8| = 8 + 6 + 4 + 2 + 0 + 2 + 4 + 6 = 32, \text{ 故 } C \text{ 正确};$$

$$D. \because |a_4| = |a_8|, d \neq 0, \therefore a_4 = -a_8, \therefore a_4 + a_8 = 0,$$

$$S_{11} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = \frac{11(a_4 + a_8)}{2} = 0, \text{ 故 } D \text{ 正确}.$$

故选 BCD.

11. 瑞士著名数学家欧拉在 1765 年提出定理：三角形的外心、重心、垂心位于同一直线上，这条直线被后人称为三角形的“欧拉线”. 若 $\triangle ABC$ 满足 $AC = BC$ ，顶点 $A(1,0)$ ， $B(-1,2)$ ，且其“欧拉线”与圆 $M: (x-3)^2 + y^2 = r^2$ 相切，则下列结论正确的是()

A. 圆 M 上的点到原点的最大距离为 $3 + \sqrt{2}$

B. 圆 M 上存在三个点到直线 $x - y - 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$

C. 若点 (x, y) 在圆 M 上，则 $\frac{y}{x+1}$ 的最小值是 $-\sqrt{2}$

D. 若圆 M 与圆 $x^2 + (y-a)^2 = 2$ 有公共点，则 $a \in [-3, 3]$

【答案】 BD

【解答】 解：由题意， $\triangle ABC$ 的欧拉线即 AB 的垂直平分线，

$$\because A(1,0), B(-1,2), \therefore AB \text{ 的中点坐标为 } (0,1), k_{AB} = \frac{2-0}{-1-1} = -1,$$

则 AB 的垂直平分线方程为 $y = x + 1$ ，即 $x - y + 1 = 0$.

由“欧拉线”与圆 $M: (x-3)^2 + y^2 = r^2$ 相切，

$$\therefore (3,0) \text{ 到直线 } x - y + 1 = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|3+1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2}, \text{ 则圆的方程为: } (x-3)^2 + y^2 = 8,$$

圆心 $(3,0)$ 到原点的距离为 $3 > 2\sqrt{2}$ ，则圆 M 上的点到原点的最大距离为 $3 + 2\sqrt{2}$ ，故 A 错误；

$\because$ 圆心 $(3,0)$ 到直线 $x - y - 1 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|3-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ， $\therefore$ 圆 M 上存在三个点到直线 $x - y - 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ ，故 B 正确；

$\frac{y}{x+1}$ 的几何意义为圆上的点与定点 $P(-1,0)$ 连线的斜率，

设过 $(-1,0)$ 与圆相切的直线方程为 $y = k(x+1)$ ，即 $kx - y + k = 0$ ，

$$\text{由 } \frac{|3k+k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2\sqrt{2}, \text{ 解得 } k = \pm 1, \therefore \frac{y}{x+1} \text{ 的最小值是 } -1, \text{ 故 } C \text{ 错误};$$

$x^2 + (y-a)^2 = 2$ 的圆心坐标 $(0, a)$ ，半径为 $\sqrt{2}$ ，

圆 M 的 $(x-3)^2 + y^2 = 8$ 的圆心坐标为 $(3,0)$ ，半径为 $2\sqrt{2}$ ，

要使圆 $x^2 + (y-a)^2 = 2$ 与圆 M 有公共点，则圆心距的范围为 $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ ，

$\therefore \sqrt{2} \leq \sqrt{3^2 + a^2} \leq 3\sqrt{2}$, 解得 $-3 \leq a \leq 3$, 故 D 正确.

故选: BD .

12. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2ax + \frac{1}{2}$, 下列结论错误的是()

- A. 当 $-1 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 有极值
- B. 当 $a = 1$ 时, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- C. 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 的极小值小于 0
- D. $\exists a \in R$, $f(x)$ 无零点

【答案】 ABD

【解答】解: $f'(x) = \frac{1}{x} + x - 2a = \frac{x^2 - 2ax + 1}{x}$, ($x > 0$)

方程 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = 4a^2 - 4$,

当 $-1 < a < 1$ 时, $\Delta < 0$, $y = x^2 - 2ax + 1$ 恒大于零, 所以 $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 单调递增, 无极值, A 错误;

当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} + x - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, $f(x)$ 单调递增, 无极值, B 错误;

当 $a > 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$,

解得 $x_1 = a - \sqrt{a^2 - 1}$, $x_2 = a + \sqrt{a^2 - 1}$,

可知 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 单调递增, 在 (x_1, x_2) 单调递减,

$f(x)$ 在 $x = x_2$ 处取得极小值, 而 $0 < x_1 < 1 < x_2$,

所以 $f(x_2) < f(1) = 1 - 2a < 0$, C 正确;

又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) > 0$,

而且 $f(x)$ 的图象连续, 所以 $f(x)$ 必有零点, D 错误.

故选 ABD .

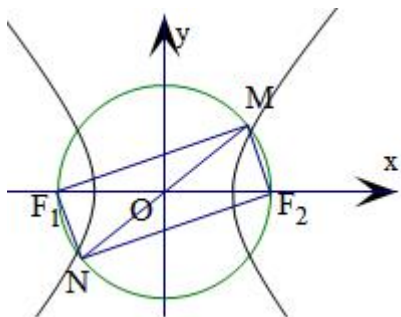
三. 填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 请把正确答案的选项填在答题卡相应位置上.)

13. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第一象限和第三象限的交点分别为 M, N , 设四边形 F_1NF_2M 的周长为 p , 面积为 S , 且满足 $32S = p^2$, 则该双曲线的离心率为_____

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【解答】

解：设 $|MF_1| = m$, $|MF_2| = n$,



由双曲线的定义可得 $m - n = 2a$, ①

由 $|OM| = |ON|$, $|OF_1| = |OF_2|$,

可得四边形 F_1NF_2M 为平行四边形,

由直径所对的圆周角为直角,

可得四边形 F_1NF_2M 为矩形,

即有 $m^2 + n^2 = 4c^2$, ②

$S = mn$, $p = 2(m + n)$,

可得 $32mn = 4(m + n)^2$, ③

由①②③可得 $4c^2 - \frac{4}{3}c^2 = 4a^2$,

即为 $2c^2 = 3a^2$,

可得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. 故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

14. 若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \ln x + 1$ 的切线, 也是曲线 $y = \ln(x + 2)$ 的切线, 则 $b =$ _____.

【答案】 $\ln 2$

【解答】 解: 设 $y = kx + b$ 与 $y = \ln x + 1$ 和 $y = \ln(x + 2)$ 的切点分别为 $(x_1, \ln x_1 + 1)$ 、 $(x_2, \ln(x_2 + 2))$;

$\because y = \ln x + 1$, $y = \ln(x + 2)$

$\therefore$ 函数 $y = \ln x + 1$ 的导数为 $y' = \frac{1}{x}$, 函数 $y = \ln(x + 2)$ 的导数为 $y' = \frac{1}{x+2}$,

$\therefore k = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2+2}$,

$\therefore x_1 - x_2 = 2$,

切线方程分别为 $y - (\ln x_1 + 1) = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$, 即为 $y = \frac{x}{x_1} + \ln x_1$,

或 $y - \ln(x_2 + 2) = \frac{1}{x_2+2}(x - x_2)$, 即为 $y = \frac{x}{x_1} + \frac{2-x_1}{x_1} + \ln x_1$,

$\therefore \frac{2-x_1}{x_1} = 0$,

解得 $x_1 = 2$,

$$\therefore b = \ln 2,$$

故答案为: $\ln 2$.

15. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - mx + \ln x$ 有极值, 则函数 $f(x)$ 的极值之和的取值范围_____.

【答案】 $(-\infty, -3)$

【解答】解: 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{x^2 - mx + 1}{x}, \text{ 因为 } f(x) \text{ 存在极值,}$$

所以 $f'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有根, 且在根的两边导数的符号相反,

即方程 $x^2 - mx + 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有根, 且在根的两边导数的符号相反,

设方程 $x^2 - mx + 1 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

当 $\Delta = m^2 - 4 = 0$ 时, $m = \pm 2$, 此时不满足题意;

所以 $\Delta = m^2 - 4 > 0$, $x_1 + x_2 = m > 0$, $x_1 x_2 = 1$,

即 $m > 2$,

$$\text{所以 } f(x_1) + f(x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - m(x_1 + x_2) + (\ln x_1 + \ln x_2)$$

$$= -\frac{1}{2}m^2 - 1 < -3,$$

故函数 $f(x)$ 的极值之和的取值范围是 $(-\infty, -3)$,

故答案为 $(-\infty, -3)$.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$, 则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为_____.

【解答】解: 由 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$ 可知,

$$a_2 - a_1 = 1, a_3 + a_2 = 3, a_4 - a_3 = 5, a_5 + a_4 = 7,$$

$$a_6 - a_5 = 9, \dots, a_{60} - a_{59} = 117,$$

由以上关系可得, 当 n 为奇数时, $a_1 + a_3 = 2, a_3 + a_5 = 2, a_5 + a_7 = 2, \dots, a_{57} + a_{59} = 2$

即相邻两个奇数项的和恒为 2,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的前 60 项中奇数项的和为 $S_{\text{奇}} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{59} = 15 \times 2 = 30$,

由 $a_2 - a_1 = 1, a_4 - a_3 = 5, a_6 - a_5 = 9, \dots, a_{60} - a_{59} = 117$ 可知,

数列 $\{a_{2n} - a_{2n-1}\}$ 为首项为 1, 公差为 4 的等差数列,

由等差数列前 n 项和可得, $(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \dots + (a_{60} - a_{59}) = (a_2 + a_4 + a_6 + \dots +$

$$a_{60}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{59}) = 30 + \frac{30 \times 29}{2} \times 4 = 1770,$$

∴数列 $\{a_n\}$ 的前 60 项中偶数项的和为 $S_{偶} = 1770 + 30 = 1800$,

∴ $a_1 + a_2 + \cdots + a_{60} = S_{奇} + S_{偶} = 30 + 1800 = 1830$.

四. 解答题 (本大题共 6 小题, 共计 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 已知圆 C 的圆心在直线 $y = x + 1$ 上, 且圆 C 与 x 轴相切, 点 $P(-5, -2)$ 在圆 C 上, 点 $Q(-4, -5)$ 在圆 C 外.

(1)求圆 C 的方程;

(2)若过点 $(-2, -4)$ 的直线 l 交圆 C 于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程.

【答案】解: (1)设圆心 $C(a, a + 1)$, 半径 $r = |a + 1|$,

则圆 C 的方程可设为 $(x - a)^2 + (y - a - 1)^2 = (a + 1)^2$,

因为点 $P(-5, -2)$ 在圆 C 上,

所以 $(5 + a)^2 + (a + 3)^2 = (a + 1)^2$, 解得 $a = -3$ 或 -11 ,

因为点 $Q(-4, -5)$ 在圆 C 外, 经检验 $a = -11$ 不符, 舍去.

故圆 C 的方程为 $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$;

(2)由(1)可知圆 C 的半径 $r = 2$, $|AB| = 2\sqrt{3}$,

所以圆心到直线的距离 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$,

当 k 不存在时, 直线方程 $x = -2$, 符合题意;

当 k 存在时, 设直线方程为 $y + 4 = k(x + 2)$, 整理得 $kx - y + 2k - 4 = 0$,

所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d = \frac{|-3k+2+2k-4|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$,

即 $(k + 2)^2 = k^2 + 1$, 解得 $k = -\frac{3}{4}$,

所以 $y + 4 = -\frac{3}{4}(x + 2)$, 所以直线的方程为 $3x + 4y + 22 = 0$.

∴综上, 直线方程为 $x = -2$ 或 $3x + 4y + 22 = 0$.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 2(n \in N^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)从下面两个条件中选择一个填在横线上, 并完成下面的问题. ① $b_2 = 4$, $b_4 = 8$; ② b_2 是 b_1 和 b_4 的等比中项, $T_8 = 72$.

若公差不为 0 的等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且____, 求数列 $\{\frac{T_n}{na_n}\}$ 的前 n 项和 A_n .

【答案】解：(1)由题意，当 $n=1$ 时， $a_1=S_1=2a_1-2$ ，解得 $a_1=2$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2-2a_{n-1}+2$ ，

化简整理，得 $a_n=2a_{n-1}$ ，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以2为首项，2为公比的等比数列，

$$\therefore a_n=2 \times 2^{n-1}=2^n, n \in N^*,$$

(2)方案一：选条件①，

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d(d \neq 0)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} b_1+d=4 \\ b_1+3d=8 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b_1=2 \\ d=2 \end{cases},$$

$$\therefore T_n=2n+\frac{n(n-1)}{2} \times 2=n(n+1),$$

$$\therefore \frac{T_n}{na_n}=\frac{n(n+1)}{n \cdot 2^n}=(n+1) \times \frac{1}{2^n},$$

$$\therefore A_n=2 \times \frac{1}{2^1}+3 \times \frac{1}{2^2}+4 \times \frac{1}{2^3}+\dots+n \times \frac{1}{2^{n-1}}+(n+1) \times \frac{1}{2^n},$$

$$\frac{1}{2}A_n=2 \times \frac{1}{2^2}+3 \times \frac{1}{2^3}+\dots+n \times \frac{1}{2^n}+(n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}},$$

两式相减，可得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_n &= 2 \times \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} - (n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - (n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2} \cdot \frac{1}{2^n},$$

$$\therefore A_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}.$$

方案二：选条件②，

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d(d \neq 0)$ ，

则由 b_2 是 b_1 和 b_4 的等比中项，可得 $b_2^2=b_1b_4$ ，

$$\text{即}(b_1+d)^2=b_1(b_1+3d),$$

化简整理，得 $(b_1-d)d=0$ ，

$$\because d \neq 0, \therefore b_1-d=0, \text{即} b_1=d,$$

$$\therefore T_8=8b_1+\frac{8 \times 7}{2}d=72,$$

化简整理，得 $2b_1+7d=18$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} b_1=d \\ 2b_1+7d=18 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b_1=2 \\ d=2 \end{cases},$$

$$\therefore T_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n(n+1),$$

$$\therefore \frac{T_n}{na_n} = \frac{n(n+1)}{n \cdot 2^n} = (n+1) \times \frac{1}{2^n},$$

$$\therefore A_n = 2 \times \frac{1}{2^1} + 3 \times \frac{1}{2^2} + 4 \times \frac{1}{2^3} + \dots + n \times \frac{1}{2^{n-1}} + (n+1) \times \frac{1}{2^n},$$

$$\frac{1}{2}A_n = 2 \times \frac{1}{2^2} + 3 \times \frac{1}{2^3} + \dots + n \times \frac{1}{2^n} + (n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}},$$

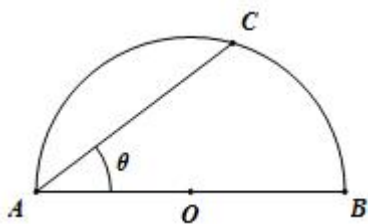
两式相减，可得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_n &= 2 \times \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} - (n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - (n+1) \times \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2} \cdot \frac{1}{2^n},$$

$$\therefore A_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}.$$

19. “既要金山银山，又要绿水青山”.某风景区在一个直径 AB 为 100 米的半圆形花园中设计一条观光线路.打算在半圆弧上任选一点 C (与 A, B 不重合),沿 AC 修一条直线段小路,在路的两侧(注意是两侧)种植绿化带;再沿弧 $\widehat{BC}$ 修一条弧形小路,在小路的一侧(注意是一侧)种植绿化带,小路与绿化带的宽度忽略不计.



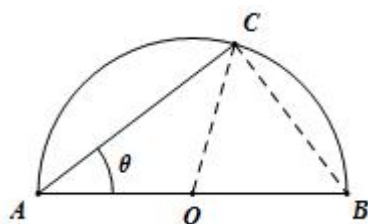
(1) 设 $\angle BAC = \theta$ (弧度), 将绿化带的总长度表示为 θ 的函数 $f(\theta)$;

(2) 求绿化带的总长度 $f(\theta)$ 的最大值.

【答案】解: (1) 连结 OC, BC .

在直角 $\triangle ABC$ 中, $AC = AB \cos \theta = 100 \cos \theta$, $\widehat{BC}$ 的弧长 $= 50 \times 2\theta = 100\theta$;

所以绿化带的总长度为 $f(\theta) = 200 \cos \theta + 100\theta$, 其中 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$;



(2)对 $f(\theta)$ 求导数, 得 $f'(\theta) = -200\sin\theta + 100$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

令 $f'(\theta) = 0$, 可得 $\sin\theta = \frac{1}{2}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$,

当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$ 时, $f'(\theta) > 0$, $f(\theta)$ 单调递增,

当 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(\theta) < 0$, $f(\theta)$ 单调递减.

所以 $f(\theta)_{\max} = f(\frac{\pi}{6}) = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 100 \times \frac{\pi}{6} = 100\sqrt{3} + \frac{50\pi}{3}$,

所以绿化带的总长度 $f(\theta)$ 的最大值为 $(100\sqrt{3} + \frac{50\pi}{3})$ 米.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = \frac{2}{a_n} - 2$, $n \geq 2$, $n \in N^*$. (I)(i)证明: 数列 $\{\frac{1}{1-a_n}\}$ 是等差数列;

(ii)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II)记 $T_n = \frac{1}{2}a_1 a_2 \cdots a_n$, $n \in N^*$, $S_n = T_1^2 + T_2^2 + \cdots + T_n^2$, 证明: 当 $n \in N^*$ 时, $a_{n+1} - \frac{2}{3} < S_n < \frac{2}{5}a_n$.

【答案】解: (I)(i)当 $n \geq 2$ 时, $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = \frac{2}{a_n} - 2$,

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{2}{a_{n+1}} - 2,$$

$$\text{相除得 } a_n = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} - 1}{\frac{1}{a_n} - 1} \text{ 整理为: } \frac{1}{1-a_n} = \frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}} = \frac{1}{1-a_{n+1}} - 1,$$

$$\text{即 } \frac{1}{1-a_{n+1}} - \frac{1}{1-a_n} = 1 (n \geq 2),$$

$$\text{又 } a_1 = \frac{2}{3}, \text{ 故 } a_2 = \frac{3}{4}, \text{ 故 } \frac{1}{1-a_2} - \frac{1}{1-a_1} = 1 \text{ 也成立,}$$

$$\therefore \frac{1}{1-a_{n+1}} - \frac{1}{1-a_n} = 1 (n \in N^*)$$

$\therefore \{\frac{1}{1-a_n}\}$ 为等差数列;

(ii)由(i)得 $\frac{1}{1-a_n} = n + 2$ 整理为: $a_n = \frac{n+1}{n+2} (n \in N^*)$,

$$(II) T_n = \frac{1}{2} a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{1}{n+2}$$

$$\therefore T_n^2 = \frac{1}{(n+2)^2} > \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3},$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= T_1^2 + T_2^2 + \cdots + T_n^2 \\ &> \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} = 1 - \frac{1}{n+3} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{n+2}{n+3} - \frac{2}{3} = a_{n+1} - \frac{2}{3},$$

$$\text{因为 } T_n^2 < \frac{1}{(n+2)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{2n+3} - \frac{2}{2n+5},$$

$$\text{所以 } S_n = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_n^2$$

$$< \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{9}\right) + \dots + \left(\frac{2}{2n+3} - \frac{2}{2n+5}\right)$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{2n+5},$$

$$\text{而 } \frac{2}{5} - \frac{2}{2n+5} - \frac{2}{5} a_n = \frac{2}{5} - \frac{2}{2n+5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \frac{2}{5} \left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right) - \frac{2}{2n+5} = 2 \left(\frac{1}{5n+10} - \frac{1}{2n+5}\right)$$

$$= 2 \times \frac{2n+5-5n-10}{(2n+5)(5n+10)} = 2 \times \frac{-3n-5}{(2n+5)(5n+10)} < 0,$$

$$\text{即 } \frac{2}{5} - \frac{2}{2n+5} < \frac{2}{5} a_n,$$

$$\text{因此 } S_n < \frac{2}{5} a_n.$$

综上所述, 当 $n \in N^*$ 时, $a_{n+1} - \frac{2}{3} < S_n < \frac{2}{5} a_n$.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的半焦距为 1, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 若 Q 是椭圆 C 的长轴上的动点 (不包含端点), 过 Q 作互相垂直的两条直线 l_1, l_2 , l_1 交椭圆 C 于 A, B 两点, l_2 交椭圆 C 于 M, N 两点, 求四边形 $AMBN$ 面积的最大值.

【答案】 解: (I) 设半焦距为 c , 所以 $c = 1$,

因为 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 所以 $a = 2$,

因为 $b^2 = a^2 - c^2$, 所以 $b^2 = 3$,

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) 当 AB 斜率不存在或斜率为 0 时,

此时 $|AB| = 4$, $|MN| = 2\sqrt{3(1 - \frac{t^2}{4})}$, 或 $|MN| = 4$, $|AB| = 2\sqrt{3(1 - \frac{t^2}{4})}$,

此时 $S_{\text{四边形}AMBN} = \frac{4\sqrt{3} \times 2\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}}{2} \leq 4\sqrt{3}$ (当 $t = 0$ 时取等号),

当 AB 的斜率存在且不为 0 时, 设 AB 直线方程为 $y = k(x - t)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

不妨设 $k > 0$, 联立 $\begin{cases} y = k(x - t) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$,

消掉 y 整理得 $(4k^2 + 3)x^2 - 8tk^2x + 4t^2k^2 - 12 = 0$,

$$\Delta = 64k^4t^2 - 16(4k^2 + 3)(k^2t^2 - 3) = 48[(4 - t^2)k^2 + 3] > 0$$

$$\text{所以} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8tk^2}{4k^2+3} \\ x_1x_2 = \frac{4t^2k^2-12}{4k^2+3} \end{cases}$$

$$\text{所以} |AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{(4-t^2)k^2+3}}{4k^2+3},$$

$$\text{把} k \text{换成} -\frac{1}{k} \text{可得} |MN| = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+(4-t^2)}}{3k^2+4},$$

$$\begin{aligned} \text{所以} S_{\text{四边形} AMBN} &= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{(4-t^2)k^2+3}}{4k^2+3} \times \frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+(4-t^2)}}{3k^2+4}, \\ &= \frac{24(k^2+1)\sqrt{(4-t^2)k^2+3}\sqrt{3k^2+(4-t^2)}}{(4k^2+3)(3k^2+4)} \end{aligned}$$

因为 $-2 < t < 2$, 所以 $0 < 4 - t^2 \leq 4$,

$$\text{所以} S_{\text{四边形} AMBN} \leq \frac{24(k^2+1)\sqrt{4k^2+3}\sqrt{3k^2+4}}{(4k^2+3)(3k^2+4)} = 24\sqrt{\frac{(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)}}$$

令 $m = k^2 + 1$, 所以 $m > 1$,

$$\text{所以} S_{\text{四边形} AMBN} \leq 24\sqrt{\frac{m^2}{12m^2+m-1}} = 24\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} + 12}}$$

因为 $m > 1$,

$$\text{所以} S_{\text{四边形} AMBN} < 4\sqrt{3}$$

综上, 四边形 $AMBN$ 面积的最大值为 $4\sqrt{3}$.

22. 已知函数 $f(x) = a \ln x$.

(1) 记函数 $g(x) = x^2 - (a+2)x + f(x)$, 当 $a > 2$ 时, 讨论函数 $g(x)$ 的单调性;

(2) 设 $h(x) = f(x) - x^2$, 若 $h(x)$ 存在两个不同的零点 x_1, x_2 , 证明: $2e < a < x_1^2 + x_2^2$ (e 为自然对数的底数).

【答案】 解: (1) $\because f(x) = a \ln x, \therefore g(x) = x^2 - (a+2)x + a \ln x (x > 0)$,

$$\therefore g'(x) = 2x - (a+2) + \frac{a}{x} = \frac{(2x-a)(x-1)}{x},$$

当 $a > 2$ 时, $\frac{a}{2} > 1, \therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$; $x \in (1, \frac{a}{2})$ 时, $g'(x) < 0$; $x \in (\frac{a}{2}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, \frac{a}{2})$ 上单调递减

$$(2) \text{由} h(x) = f(x) - x^2 = a \ln x - x^2 (x > 0), \text{则} h'(x) = \frac{a}{x} - 2x = \frac{a-2x^2}{x},$$

① 若 $a \leq 0$, 则 $h'(x) < 0$ 成立, 即 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$h(x)$ 最多有一个零点, 不合题意.

$$\text{② 若} a > 0, \text{令} h'(x) = 0 \text{得} x = \sqrt{\frac{a}{2}} \text{或} x = -\sqrt{\frac{a}{2}} (\text{舍去}),$$

当 $x \in (0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; $x \in (\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

$\therefore h(x) \leq h(\sqrt{\frac{a}{2}}) = \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$. 若 $h(x)$ 存在两个不同的零点 x_1, x_2 , 则 $h(\sqrt{\frac{a}{2}}) > 0$, 即 $\frac{a}{2} \ln \frac{a}{2} - \frac{a}{2} > 0$, $\therefore \ln \frac{a}{2} > 1$, 即 $a > 2e$.

当 $a > 2e$ 时, 又 $h(1) = -1 < 0$, $\therefore h(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 上恰有一个零点,

又 $e^a > a (a > 0)$, 则 $h(e^a) = a^2 - (e^a)^2 < 0$, 又 $a > \sqrt{\frac{a}{2}} \therefore h(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上恰有一个零点.

$\therefore a > 2e$ 成立.

由 $h(x_1) = h(x_2)$ 可得 $a \ln x_1 - x_1^2 = a \ln x_2 - x_2^2$, 即 $a(\ln x_1 - \ln x_2) = x_1^2 - x_2^2$,

可设 $x_1 > x_2 > 0$, 则 $\ln x_1 > \ln x_2$, 则 $a = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\ln x_1 - \ln x_2}$;

要证 $a < x_1^2 + x_2^2$, 即证 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{\ln x_1 - \ln x_2} < x_1^2 + x_2^2$, 即证 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{\frac{x_1^2}{x_2^2} - 1}{\frac{x_1^2}{x_2^2} + 1} + 1$

设 $t = \frac{x_1}{x_2} (t > 1)$, 即证 $\ln t > \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$,

设 $\varphi(t) = \ln t - \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} (t > 0)$, 可得 $\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2} \geq 0$ 成立, 且仅当 $t = 1$ 时等号成立, 所以 $\varphi(t)$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以, 当 $t > 1$ 时, $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$,

即 $\ln t > \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, 则 $a < x_1^2 + x_2^2$,

综上可得: $2e < a < x_1^2 + x_2^2$.