2021—2022 学年度第二学期期初调研测试参考答案

高 二 数 学

2022.2

1. D　2. B　3. C　4. A　5. B　6. C　7. C　8. A

9. AC　10. ABD　11. ABC　12.BCD

13. $\sqrt{3}$　14. $(e,+\infty)$　15. $2x-y-3=0$　16. 16

17. 解：(1) 因为 $l_1: x-2y=0$，且 $l_1 /\!/ l_2$，

所以直线 l_2 的斜率为 $\frac{1}{2}$，……2 分

又直线 l_2 过点 $A(2,4)$，

所以直线 l_2 的方程为 $y-4=\frac{1}{2}(x-2)$，即 $y=\frac{1}{2}x+3$. ……5 分

(2) 因为 $l_1: x-2y=0$，且 $l_1 \perp l_2$，

所以直线 l_2 的斜率为 -2，……7 分

又直线 l_2 过点 $A(2,4)$，

所以直线 l_2 的方程为 $y=-2x+8$. ……10 分

18. 解：(1) 由条件 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，……2 分

因为 $a_1+1=2\neq0$，所以 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2, n\in\mathbf{N}^*$，即 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=2, n\in\mathbf{N}^*$ ……4 分

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列；……6 分

(2) 由(1)知，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为：$b_n=2\cdot2^{n-1}=2^n, n\in\mathbf{N}^*$

选①：$b_n+\log_2 b_n=2^n+n$，……7 分

$S_n=\left(2^1+1\right)+\left(2^2+2\right)+\left(2^3+3\right)+\ldots+\left(2^n+n\right)$

$=(2+2^2+\ldots+2^n)+(1+2+\ldots+n)$ ……9 分

$=\frac{2\left(1-2^n\right)}{-1}+\frac{n\left(n+1\right)}{2}\quad=2^{n+1}+\frac{n^2+n-4}{2}$. ……12 分

选②：$\frac{1}{\log_2 b_n\cdot\log_2 b_{n+1}}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，……9 分

则 $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. ……12 分

选③：$nb_n=n\cdot2^n$，

则 $S_n=1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+n\cdot2^n$，$2S_n=1\cdot2^2+2\cdot2^3+\ldots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$，……9 分

两式相减得，$S_n=-\left(2+2^2+\ldots+2^n\right)+n\cdot2^{n+1}$

$=2\left(1-2^n\right)+n\cdot2^{n+1}=(n-1)2^{n+1}+2$. ……12 分

19. 解：(1) $f'(x)=3x^2+2ax+b$，由题意得 $\begin{cases}f(1)=2,\\ f'(1)=4,\\ f'(-1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1+a+b+c=2,\\ 3+2a+b=4,\\ 3-2a+b=0,\end{cases}$ ……3 分

解得 $a=1$，$b=-1$，$c=1$．所以 $f(x)=x^3+x^2-x+1$，……5 分

经检验，符合要求. ……………………………………………………………………6 分

(2) $f'(x)=3x^2+2x-1$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{1}{3}$. ……………………………8 分

x	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-1	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	11

……………………………………………………………………………………11 分

所以 $f(x)_{\max}=f(2)=11$. …………………………………………………………12 分

20. 解：(1) ① 当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为：$x=-2$，满足条件，

此时直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$. ……………………………………………………………2 分

② 当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为：$y=k(x+2)$，

由直线 l 与圆 $C:x^2+\left(y+2\sqrt{3}\right)^2=4$ 相切，

则圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|2k+2\sqrt{3}|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{5\pi}{6}$.

综上得：直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$. ……………………………………………6 分

[**注：**若漏掉 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$，则扣 2 分]

(2) 设 $Q(x,y)$，由 $QA=2QB$ 得 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，

化简得 $\left(x-2\right)^2+y^2=4$ ……………………………………………………………9 分

由题意知点 P 在圆 $C:x^2+\left(y+2\sqrt{3}\right)^2=4$ 上，点 Q 在圆 $\left(x-2\right)^2+y^2=4$ 上，

则两圆圆心距离为 4，所以 PQ 的最大值为 8. ………………………………………12 分

21. 解：(1) 因为离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $3a^2=4c^2$，

因为 $c^2=a^2-b^2$，所以 $3a^2=4(a^2-b^2)$，即 $a^2=4b^2$ ①.

因为点 $(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆 C 上，所以 $\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1$ ②.

联列①②解得 $b^2=1$，$a^2=4$. 所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………4 分

(2) **方法一：**由 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

当 $\Delta=(8km)^2-4(1+4k^2)(4m^2-4)=16(4k^2+1-m^2)>0$ 时，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2},\\x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2},\end{cases}$ ……………………………………6 分

因为直线 OA 与直线 OB 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{4}$，所以 $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\dfrac{1}{4}$，即 $x_1x_2+4y_1y_2=0$，

所以 $x_1x_2+4(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，即 $(1+4k^2)x_1x_2+4km(x_1+x_2)+4m^2=0$，

所以 $4m^2-4+\dfrac{-32k^2m^2}{1+4k^2}+4m^2=0$，化简得 $2m^2=4k^2+1$. ………………………………8 分

思路 1：因为弦 AB 的中点为 M，

所以 $x_M=\dfrac{-4km}{1+4k^2}$，$y_M=kx_M+m=\dfrac{-4k^2m+m+4k^2m}{1+4k^2}=\dfrac{m}{1+4k^2}$，

又 $2m^2=4k^2+1$，所以 $M(-\dfrac{2k}{m},\dfrac{1}{2m})$. ………………………………………………9 分

假设存在正实数 t，使得 $k_1k_2=\lambda$，即 $\dfrac{\frac{1}{2m}}{-\frac{2k}{m}+t}\cdot\dfrac{\frac{1}{2m}}{-\frac{2k}{m}-t}=\lambda$ 对任意的符合条件的 k,m 恒成立，

则 $\dfrac{1}{4m^2}=\lambda(\dfrac{4k^2}{m^2}-t^2)$，即 $\dfrac{1}{4\lambda}=4k^2-t^2m^2$，即 $(2-t^2)m^2-1-\dfrac{1}{4\lambda}=0$ 对任意的符合条件的 m 恒成立，

所以 $\begin{cases}2-t^2=0,\\ -1-\dfrac{1}{4\lambda}=0,\end{cases}$ 又 $t>0$，所以 $t=\sqrt{2}$，$\lambda=-\dfrac{1}{4}$.

故存在正实数 $t=\sqrt{2}$，使得 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………12 分

思路 2：同思路 1 可得 $M(-\dfrac{2k}{m},\dfrac{1}{2m})$，即 $\begin{cases}x_M=-\dfrac{2k}{m}\\ y_M=\dfrac{1}{2m}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}k=-\dfrac{x_M}{4y_M},\\ m=\dfrac{1}{2y_M}.\end{cases}$

又 $2m^2=4k^2+1$，所以 $2\times(\dfrac{1}{2y_M})^2=4\times(-\dfrac{x_M}{4y_M})^2+1$，即 $\dfrac{x_M^2}{2}+\dfrac{y_M^2}{\frac{1}{2}}=1(y_M\neq 0)$.

假设存在正实数 t，使得 $k_1k_2=\lambda$，即 $\dfrac{y_M}{x_M+t}\cdot\dfrac{y_M}{x_M-t}=\lambda$ 对任意的 (x_M,y_M) 恒成立，

即 $y_M^2=\lambda(x_M^2-t^2)$ 恒成立，所以 $\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{x_M^2}{2})=\lambda(x_M^2-t^2)$ 对任意的 x_M 恒成立，

即 $(\lambda+\dfrac{1}{4})x_M^2-\lambda t^2-\dfrac{1}{2}=0$ 对任意的 x_M 恒成立，所以 $\begin{cases}\lambda+\dfrac{1}{4}=0\\ \lambda t^2+\dfrac{1}{2}=0\end{cases}$，又 $t>0$，解之得 $\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{4},\\ t=\sqrt{2}.\end{cases}$

故存在正实数 $t=\sqrt{2}$，使得 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………12 分

思路 3：同思路 2 得 $\dfrac{x_M^2}{2}+\dfrac{y_M^2}{\frac{1}{2}}=1(y_M\neq 0)$.

取 $t=\sqrt{2}$，即 $D_1(-\sqrt{2},0)$，$D_2(\sqrt{2},0)$，

则 $k_1k_2=\dfrac{y_M}{x_M+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_M}{x_M-\sqrt{2}}=\dfrac{y_M^2}{x_M^2-2}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{x_M^2}{2})}{x_M^2-2}=\dfrac{-\frac{1}{4}(x_M^2-2)}{x_M^2-2}=-\dfrac{1}{4}$，

故存在正实数 $t=\sqrt{2}$，使得 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………12 分

方法二： 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 的中点 $M(x_M,y_M)$.

因为 A、B 在椭圆 C 上，且直线 OA 与直线 OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$，

所以 $\begin{cases} x_1^2+4y_1^2=4, \\ x_2^2+4y_2^2=4, \\ \frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{4}, \end{cases}$ 又 $\begin{cases} 2x_M=x_1+x_2, \\ 2y_M=y_1+y_2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4x_M^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2, ① \\ 4y_M^2=y_1^2+y_2^2+2y_1y_2, ② \end{cases}$

①+②×4 得 $4(x_M^2+4y_M^2)=(x_1^2+4y_1^2)+(x_2^2+4y_2^2)+2(x_1x_2+4y_1y_2)$，

则 $4(x_M^2+4y_M^2)=8$，所以 $\frac{x_M^2}{2}+\frac{y_M^2}{\frac{1}{2}}=1$.

下同方法一中的思路 2 或思路 3，略.

22． 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}-a$. …….1 分

① 若 $a\le 0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，此时 $f(1)=-a>0$，不合题意，舍去. ……3 分

② 若 $a>0$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上递增，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上递减.

所以 $\left[f(x)\right]_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1$，令 $-\ln a-1=-1$，得 $a=1$.

综上得：$a=1$. ………6 分

(2) 因为不等式 $f(x)\le e^{x-1}-x-a$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，

所以不等式 $\ln x-ax-e^{x-1}+x+a\le 0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立.

令 $F(x)=\ln x-ax-e^{x-1}+x+a$，则 $F'(x)=\frac{1}{x}-a-e^{x-1}+1$，

令 $h(x)=\frac{1}{x}-a-e^{x-1}+1$，则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-e^{x-1}<0$，所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递减. ………7 分

① 若 $a\ge 1$，则 $h(x)\le h(1)=1-a\le 0$，即 $F'(x)\le 0$，

所以 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递减，所以 $F(x)\le F(1)=0$ 符合题意. ……………………………9 分

[注：也可以通过 $\frac{1}{x}-e^{x-1}\le 0$，$1-a\le 0$ 得到 $F'(x)\le 0$]

② 若 $a<1$，则 $2-a>1, 1+\ln(2-a)>1$，

$h(1+\ln(2-a))=\frac{1}{1+\ln(2-a)}-a-(2-a)+1=-1+\frac{1}{1+\ln(2-a)}<0$，

[注："取点"方法不唯一，例如 $h(2-a)<0$]

又 $h(1)=1-a>0$，$h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

所以存在唯一实数 $x_0\in\left(1,1+\ln(2-a)\right)$，使得 $h\left(x_0\right)=0$.

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$h(x)>0$，即 $F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上递增，

所以 $F(x)\ge F(1)=0$，不合题意.

综上，实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$. ……………………………………………………12 分