

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习 (1)

班级_____ 姓名_____ 学号_____

1. 已知抛物线 C 的顶点为坐标原点，焦点在 y 轴上，且抛物线 C 经过点 $P(2,1)$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2) A, B 是抛物线 C 上异于点 P 的两个动点，记直线 PA 和直线 PB 的斜率分别为 $k_1, k_2 (k_1 k_2 \neq 0)$,

若 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2$ ，求证：直线 AB 过定点.

2. 已知函数 $f(x) = (x - k)e^x$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值.

午间练习（1）答案

1. 解：(1)由题意，设抛物线 C 的方程为 $x^2 = 2py (p \in R)$.

因为抛物线经过点 $P(2,1)$ ，所以 $2^2 = 2p$ ，解得 $p = 2$ 。所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4y$ 。

(2)由题意可知，直线 AB 的斜率一定存在，不妨设直线 AB 的方程为 $y = kx + b$, $A\left(x_1, \frac{x_1^2}{4}\right)$, $B\left(x_2, \frac{x_2^2}{4}\right)$ 。

联立 $\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = kx + b, \end{cases}$ 得 $x^2 - 4kx - 4b = 0$ 。其中 $\Delta = 16k^2 + 16b > 0$ ，即 $k^2 + b > 0$ ，

$$\therefore x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -4b. \quad \therefore \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{\frac{x_1-2}{\frac{x_1^2}{4}-1}}{\frac{x_2-2}{\frac{x_2^2}{4}-1}} = \frac{4}{x_1+2} + \frac{4}{x_2+2} = \frac{4(x_1+x_2)+16}{x_1 x_2 + 2(x_1+x_2)+4} = 2,$$

即 $\frac{4 \times 4k + 16}{x_1 x_2 + 2 \times 4k + 4} = 2$ ，所以 $x_1 x_2 = -4b = 4$ ，解得 $b = -1$ 。

所以直线 AB 的方程为 $y = kx - 1$ ，恒过定点 $(0, -1)$ 。

2. 解：(1) $f'(x) = (x - k + 1)e^x$ 。令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = k - 1$ 。

当 x 变化时， $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty, k-1)$	$k-1$	$(k-1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	$-e^{k-1}$	单调递增

所以， $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, k-1)$ ；单调递增区间是 $(k-1, +\infty)$ 。

(2)当 $k-1 \leq 0$ ，即 $k \leq 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(0) = -k$ 。

当 $0 < k-1 < 1$ ，即 $1 < k < 2$ 时，由(1)知 $f(x)$ 在 $[0, k-1]$ 上单调递减，在 $(k-1, 1]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(k-1) = -e^{k-1}$ 。

当 $k-1 \geq 1$ ，即 $k \geq 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(1) = (1-k)e$ 。

综上所述，当 $k \leq 1$ 时，最小值为 $f(0) = -k$ ；

当 $1 < k < 2$ 时，最小值为 $f(k-1) = -e^{k-1}$ ；

当 $k \geq 2$ 时，最小值为 $f(1) = (1-k)e$ 。

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习 (2)

班级_____ 姓名_____ 学号_____

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 2$, S_2 是 a_2 和 a_3 的等差中项.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n \cdot \log_2 a_{n+1}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 若 $T_n < 256$, 求 n 的最大值.

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (a+1)x + \ln x (a \in R)$.

(1)若 $a = 0$, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2)讨论函数 $f(x)$ 的单调区间.

午间练习(2) 答案

1. 解: (1) $\because S_2$ 是 a_2 和 a_3 的等差中项, $\therefore 2S_2 = 2(a_1 + a_2) = a_2 + a_3$, 即 $2(2 + 2q) = 2q + 2q^2$, 化简得 $q^2 - q - 2 = 0$, 解得 $q = 2$ 或 $q = -1$, $\because q > 0$, $\therefore q = 2$, $\therefore a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, $n \in N^*$.

(2) 由题得 $b_n = a_n \cdot \log_2 a_{n+1} = 2^n \cdot \log_2 2^{n+1} = (n+1) \cdot 2^n$, $\therefore T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} + b_n$,

$$\therefore T_n = 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} + (n+1) \cdot 2^n \text{ ①},$$

$$2T_n = 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1} \text{ ②},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } -T_n = 2 \times 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - (n+1) \cdot 2^{n+1} = 4 + \frac{4(1-2^{n-1})}{1-2} - (n+1) \cdot 2^{n+1} = -$$

$$n \cdot 2^{n+1}, \therefore T_n = n \cdot 2^{n+1}, \text{ 可知数列 } \{T_n\} \text{ 是递增数列, } \therefore T_4 = 4 \times 32 = 128, T_5 = 5 \times 64 = 320,$$

$\therefore$ 若 $T_n < 256$ 成立, 则 $n \leq 4$, $n \in N^*$, 即 n 的最大值为 4.

2. 解: (1) 若 $a = 0$, $f(x) = -x + \ln x$, 其导函数为 $f'(x) = -1 + \frac{1}{x}$. 依题意, 有 $f(1) = -1$, $f'(1) = 0$, 则切线方程为 $y + 1 = 0(x - 1)$, 即 $y + 1 = 0$.

$$(2) f'(x) = ax - (a+1) + \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x}, = \frac{(ax-1)(x-1)}{x} (x > 0)$$

当 $a \leq 0$ 时, $(ax-1) < 0$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$, 则函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0, 1)$, 减区间是 $(1, +\infty)$;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-1)}{x} = 0$, 得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{a}$, 再讨论两根的大小关系;

当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$,

则函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(1, +\infty)$, 减区间是 $(\frac{1}{a}, 1)$;

当 $a = 1$ 时, $\frac{1}{a} = 1$, 则函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0, +\infty)$, 没有减区间;

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < 1$ 或 $x > \frac{1}{a}$,

则函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0, 1)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 减区间是 $(1, \frac{1}{a})$;

综上, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0, 1)$, 减区间是 $(1, +\infty)$;

当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(1, +\infty)$, 减区间是 $(\frac{1}{a}, 1)$;

当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 增区间是 $(0, +\infty)$, 没有减区间;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0, 1)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 减区间是 $(1, \frac{1}{a})$.

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第二学期高二数学午间练习 (3)

班级_____ 姓名_____ 学号_____

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $2S_n = 3a_n - 3$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2)设 $b_n = \log_3 a_n$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求数列 $\{\frac{1}{T_n}\}$ 的前 n 项和.

2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 且经过点 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)过点 $P(0,2)$ 的直线交椭圆 C 于 A 、 B 两点, 求 $\triangle AOB$ (O 为原点)面积的最大值.

午间练习(3) 答案

1. 解: (1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $2S_n = 3a_n - 3$ ①,

当 $n = 1$ 时, 解得 $a_1 = 3$, 当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = 3a_{n-1} - 3$ ②,

① - ②得: $a_n = 3a_{n-1}$, 故数列 $\{a_n\}$ 是以3为首项, 3为公比的等比数列; 所以 $a_n = 3^n$;

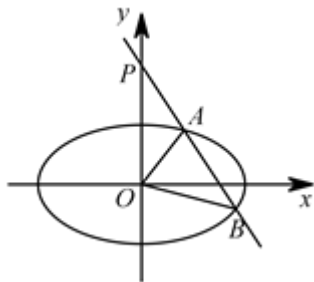
(2) 由(1)得 $b_n = \log_3 a_n = n$, 所以 $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 故 $\frac{1}{T_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$,

所以数列 $\{\frac{1}{T_n}\}$ 的前 n 项和为 $2(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 2(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{2n}{n+1}$.

2. 解: (1) 由 $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{3}$, 得 $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ①由椭圆 C 经过点 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, 得 $\frac{9}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$ ②,

联立①②, 解得 $b = 1$, $a = \sqrt{3}$. 所以椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) 易知直线 AB 的斜率存在, 设其方程为 $y = kx + 2$.



将直线 AB 的方程与椭圆 C 的方程联立, 消去 y 得 $(1 + 3k^2)x^2 + 12kx + 9 = 0$.

令 $\Delta = 144k^2 - 36(1 + 3k^2) > 0$, 得 $k^2 > 1$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{12k}{1+3k^2}$, $x_1x_2 = \frac{9}{1+3k^2}$. 所以 $S_{\triangle AOB} = |S_{\triangle POB} - S_{\triangle POA}| = \frac{1}{2} \times 2 \times |x_1 - x_2| = |x_1 - x_2|$,

因为 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{12k}{1+3k^2}\right)^2 - \frac{36}{1+3k^2} = \frac{36(k^2-1)}{(1+3k^2)^2}$,

设 $k^2 - 1 = t (t > 0)$, 则 $(x_1 - x_2)^2 = \frac{36t}{(3t+4)^2} = \frac{36}{9t + \frac{16}{t} + 24} \leq \frac{36}{2\sqrt{9t \times \frac{16}{t}} + 24} = \frac{3}{4}$.

当且仅当 $9t = \frac{16}{t}$, 即 $t = \frac{4}{3}$ 时等号成立,

此时 $\triangle AOB$ 面积取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.