## 3.2.2　基本不等式的应用

[学习目标]　1.熟练掌握基本不等式及其变形的应用.2.会用基本不等式解决简单的最大(小)值问题.3.能够运用基本不等式解决生活中的应用问题.

导语

相等与不等关系经常会涉及到最大值、最小值问题,而基本不等式可以解决变化中的最值问题,那么在什么条件下可以应用基本不等式来求最值呢?这节课我们就一起来探究一下这个问题.

一、配凑法求最值

例1　(1)函数*y*=*x*+(*x*<2)的最大值是(　　)

A.4 B.5

C.-2 D.2

答案　C

解析　因为*x*<2,所以*x*-2<0,

则*y*=*x*+=*x*-2++2

=-+2≤-2+2=-2,

当且仅当2-*x*=,即*x*=0时,等号成立,

所以函数*y*=*x*+(*x*<2)的最大值是-2.

(2)已知实数0<*b*<2,求(2-*b*)(1+2*b*)的最大值.

解　(2-*b*)(1+2*b*)=(4-2*b*)(1+2*b*)≤×=,

当且仅当4-2*b*=1+2*b*,即*b*=时取等号,

所以(2-*b*)(1+2*b*)的最大值为.

反思感悟　通过配凑法利用基本不等式求最值的策略

配凑法的实质在于代数式的灵活变形,拼系数、凑常数是关键,利用配凑法求最值应注意以下几个方面:①配凑的技巧,以整式为基础,注意利用系数的变化以及等式中常数的调整,做到等价转换;②代数式的变形以配凑出和或积的定值为目标;③拆项、添项应注意检验利用基本不等式的前提.

跟踪训练1　已知实数*x*>1,则2-*x*-的(　　)

A.最小值为1 B.最大值为1

C.最小值为-1 D.最大值为-1

答案　D

解析　2-*x*-=1+1-*x*-=1-,由*x*>1,可得(*x*-1)+≥2=2,当且仅当=*x*-1,即*x*=2时取等号,故2-*x*-≤1-2=-1,即2-*x*-的最大值为-1.

二、基本不等式的实际应用

例2　甲工厂承担了某种材料的生产,并以*x*千克*/*时的速度匀速生产(为保证质量要求1≤*x*≤10),每小时可消耗*A*材料(*kx*2+9)千克,已知每小时生产1千克该产品时,消耗*A*材料10千克.

(1)设生产*m*千克该产品,消耗*A*材料*y*千克,试把*y*表示为*x*的函数;

(2)要使生产1000千克该产品消耗的*A*材料最少,工厂应选取何种生产速度?并求消耗的*A*材料最少为多少?

解　(1)由题意,得*k*+9=10,即*k*=1,

生产*m*千克该产品需要的时间是小时,

所以*y*=(*kx*2+9)=*m*,1≤*x*≤10.

(2)由(1)知,生产1000千克该产品消耗的*A*材料为*y*=1000≥1000×2=6000(千克),

当且仅当*x*=,即*x*=3时,等号成立,

故工厂应选取3千克*/*时的生产速度,此时消耗的*A*材料最少,最少为6000千克.

反思感悟　利用基本不等式解决实际问题的步骤

(1)先理解题意,设变量.设变量时一般把要求最大值或最小值的变量定为函数.

(2)建立相应的函数关系式.把实际问题抽象为函数的最大值或最小值问题.

(3)在定义域内求出函数的最大值或最小值.

(4)正确写出答案.

跟踪训练2　某村计划建造一个室内面积为800m2的矩形蔬菜温室,温室内沿左右两侧与后墙内侧各保留1m宽的通道,沿前侧内墙保留3m宽的空地,当矩形温室的边长各为多少时,蔬菜的种植面积最大?最大种植面积是多少?



解　设矩形温室的一边长为*x* m,与其对应的种植蔬菜的区域的一边长为(*x*-4) m,

则矩形温室的另一边长为m,与其对应的种植蔬菜的区域的另一边长为m.

由得4<*x*<400,

所以其面积*S*=(*x*-4)·

=808-

≤808-2=808-160=648(m2).

当且仅当2*x*=,即*x*=40时,等号成立.

因此当矩形温室的两边长分别为40m,20m时,蔬菜的种植面积最大,最大种植面积是648m2.

D:\杂\word图标\word图标\课堂小结通.tif

1.知识清单:

(1)配凑法求最值.

(2)基本不等式的实际应用.

2.方法归纳:配凑法.

3.常见误区:忽略应用基本不等式求最值的条件(一正、二定、三相等).



1.用一段长为8cm的铁丝围成一个矩形模型,则这个模型的最大面积为(　　)

A.9cm2 B.16cm2

C.4cm2 D.5cm2

答案　C

解析　设矩形模型的长和宽分别为*x* cm,*y* cm,

则*x*>0,*y*>0,

由题意可得2(*x*+*y*)=8,所以*x*+*y*=4,

所以矩形模型的面积*S*=*xy*≤==4,当且仅当*x*=*y*=2时,等号成立,

所以当矩形模型的长和宽都为2cm时,面积最大,为4cm2.

2.已知0<*x*<1,则*x*(3-3*x*)取最大值时*x*的值为(　　)

A. B.

C. D.

答案　B

解析　∵0<*x*<1,

∴1-*x*>0,

∴*x*(3-3*x*)=3*x*(1-*x*)≤3=,

当且仅当*x*=时取等号.

∴*x*(3-3*x*)取最大值时,*x*的值为.

3.当*x*>1时,则*x*+的最小值为　　　　.

答案　5

解析　因为*x*>1,故有*x*-1>0,所以*x*+=*x*-1++1≥2+1=5,

当且仅当*x*-1=,即*x*=3时等号成立.因此所求的最小值为5.

4.某公司购买一批机器投入生产,据市场分析,每台机器生产的产品可获得的总利润*y*(单位:万元)与机器运转时间*x*(单位:年)的关系为*y*=-*x*2+18*x*-25(*x*∈**N***\**),则当每台机器运转　　　　年时,年平均利润最大,最大值是　　　　万元.

答案　5　8

解析　每台机器运转*x*年的年平均利润为

=18-,且*x*∈**N***\**,

故≤18-2=8,

当且仅当*x*=5时,等号成立,

所以,当每台机器运转5年时,年平均利润最大,最大值为8万元.

## 课时对点练　[分值:100分]

单选题每小题5分,共40分;多选题每小题6分,共12分



1.下列各式中最小值为2的是(　　)

A.*y*=*t*+(*t*>1)

B.*y*=+

C.*y*=*t*2+

D.*y*=*t*++1(*t*>0)

答案　B

解析　A中,*y*=*t*+≥2,当且仅当*t*=1时,等号成立,又*t*>1,故A不正确;B中,*y*=+≥2,当且仅当*t*=1时,等号成立,故B正确;C中,*y*=*t*2+=(*t*2+1)+-1≥2-1=1,当且仅当*t*=0时,等号成立,故C不正确;D中,*y*=*t*++1≥3,当且仅当*t*=1时,等号成立,故D不正确.

2.小王准备用18m的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园,墙长为18m,小王需要合理安排矩形的长、宽才能使菜园的面积最大,则菜园面积的最大值为(　　)

A.m2 B.40m2

C.36m2 D.32m2

答案　A

解析　设矩形菜园中平行于墙的边长为*x* m,垂直于墙的边长为*y* m,菜园面积*S*=*xy*,

则*x*+2*y*=18,∴*x*+2*y*≥2,∴*xy*≤,当且仅当*x*=2*y*=9时取等号.

3.已知*a*>0,*b*>0,则*a*+2*b*+的最小值为(　　)

A.6 B.5

C.4 D.3

答案　D

解析　由于*a*>0,*b*>0,所以*a*+2*b*+1>0,由*a*+2*b*+=(*a*+2*b*+1)+-1≥2-1=3,当且仅当*a*+2*b*=1时取等号,可得*a*+2*b*+的最小值为3.

4.某服装加工厂为了适应市场需求,引进某种新设备,以提高生产效率和降低生产成本.已知购买*m*台设备的总成本为*y*=*m*2+*m*+200(单位:万元).若要使每台设备的平均成本最低,则应购买设备(　　)

A.100台 B.200台

C.300台 D.400台

答案　B

解析　=+1+≥2+1=3,当且仅当=,即*m*=200时,等号成立,所以应购买200台,使得每台设备的平均成本最低.

5.(多选)下列说法不正确的是(　　)

A.若*x*>0,则*x*(2-*x*)的最大值为2

B.函数*y*=的最小值为4

C.≥2

D.若*a*>3,则*a*+≥2,当且仅当*a*=,即*a*=4时,*a*+取得最小值8

答案　ABD

解析　若*x*>0,则*x*(2-*x*)≤=1,当且仅当*x*=2-*x*,即*x*=1时,等号成立,故A错误;*y*===2≥2×2=4,当且仅当=,即*x*2=-2时,等号成立,显然取不到最小值,故B错误;=|*x*|+≥2=2,当且仅当*x*=±1时,等号成立,故C正确;若*a*>3,则*a*-3>0,*a*+=*a*-3++3≥2+3=7,当且仅当*a*-3=,即*a*=5时,等号成立,故D错误.

6.(多选)已知某出租车司机为升级服务水平,购入了一辆豪华轿车投入运营,据之前的市场分析得出每辆车的营运总利润*y*(万元)与运营年数*x*的关系为*y*=-*x*2+12*x*-25,则下列判断正确的是(　　)

A.车辆运营年数越多,收入越高

B.车辆在第6年时,总收入最高

C.车辆在前5年的平均收入最高

D.车辆每年都能盈利

答案　BC

解析　由题意,*y*=-*x*2+12*x*-25,是开口向下的二次函数,故A错误;对称轴*x*=6,故B正确;=-*x*+12-=-+12≤-2+12=2,当且仅当*x*=5时,等号成立,故C正确;当*x*=1时,*y*=-14,故D错误.

7.(5分)已知*y*=2*x*+(*x*>3),则当*x*=　　　　时,*y*取最小值为　　　　.

答案　5　14

解析　因为*x*>3,所以*x*-3>0,则*y*=2*x*+=2(*x*-3)++6≥2+6=14,当且仅当2(*x*-3)=,即*x*=5时取等号,所以当*x*=5时,*y*取最小值为14.

8.(5分)要制作一个容积为4m3,高为1m的无盖长方体容器.已知该容器的底面造价是每平方米20元,侧面造价是每平方米10元,则该容器的最低总造价是　　　　元.

答案　160

解析　设底面矩形的一边长为*x* m,

由容器的容积为4m3,高为1m,

得另一边长为m.

记容器的总造价为*y*元,则

*y*=4×20+2×1×10=80+20

≥80+20×2=160,

当且仅当*x*=,即*x*=2时,等号成立.

因此当*x*=2时,*y*取得最小值160,

即容器的最低总造价为160元.

9.(10分)当*x*>-1时,求代数式的最大值.

解　当*x*>-1时,有*x*+1>0,

则=

=≤

==,

当且仅当*x*+1=,即*x*=-1时,等号成立,

所以代数式的最大值为.

10.(11分)某轮船公司的一艘轮船每小时花费的燃料费与轮船航行速度的平方成正比,比例系数为*k*,轮船的最大速度为15海里*/*小时.当船速为10海里*/*小时时,它的燃料费是每小时96元,其余航行运作费用(不论速度如何)总计是每小时150元,假定运行过程中轮船以速度*v*匀速航行.

(1)求*k*的值;(5分)

(2)求该轮船航行100海里的总费用*W*(燃料费+航行运作费用)的最小值.(6分)

解　(1)由题意,设燃料费为*W*1=*kv*2,

∵当船速为10海里*/*小时时,它的燃料费是每小时96元,

∴当*v*=10时,*W*1=96,可得96=*k*×102,

解得*k*=0.96.

(2)∵其余航行运作费用(不论速度如何)总计是每小时150元,

∴航行100海里的时间为小时,可得其余航行运作费用为×150=元.

因此,航行100海里的总费用为

*W*=0.96*v*2·+=96*v*+(0<*v*≤15).

∵96*v*+≥2=2400,

∴当且仅当96*v*=时,

即*v*==12.5<15时,航行100海里的总费用最小,且这个最小值为2400元.



11.某公司一年购买某种货物500吨,每次购买*x*吨,运费为5万元*/*次,一年的总存储费用为9*x*万元,则一年的总运费与总存储费用之和的最小值为(　　)

A.200万元 B.300万元

C.400万元 D.500万元

答案　B

解析　一年的总运费与总存储费用之和为*y*=×5+9*x*=+9*x*≥2=300,当且仅当=9*x*,即*x*=时取等号,所以一年的总运费与总存储费用之和的最小值为300万元.

12.为了净化水质,向一个池塘中加入某种药品,加药后,池塘中该药品的浓度*C*(单位:mg/L)随时间*t*(单位:h)的变化关系为*C*=,则一段时间后,池塘中药品的最大浓度为(　　)

A.4mg/L B.6mg/L

C.8mg/L D.12mg/L

答案　A

解析　*C*==≤=4,当且仅当*t*=3时取等号,故经过3h后,池塘中药品的浓度达到最大,最大浓度为4mg/L.

13.若0<*x*<,则*x*的最大值为(　　)

A.1 B.

C. D.

答案　C

解析　因为0<*x*<,所以1-4*x*2>0,

所以*x*=×2*x*

=

≤=,

当且仅当4*x*2=1-4*x*2,即*x*=时,等号成立,

因此,*x*的最大值为.

14.(5分)已知*m*=*a*+(*a*>2),*n*=2-*b*2(*b*≠0),则*m*,*n*的大小关系是　　　　　　.

答案　*m*>*n*

解析　由*a*>2,得*a*-2>0.

又*m*=*a*+=(*a*-2)++2,

所以*m*≥2+2=4.

当且仅当*a*-2=,即*a*=3时取等号,

由于*b*≠0,所以*n*=2-*b*2<2<4.

因此*m*>*n*.



15.已知任意的正数*a*,*b*,*c*,有≥成立,当且仅当*a*=*b*=*c*时,等号成立.若0<*m*<3,则*m*2(3-*m*)的最大值为(　　)

A.3 B.4

C.5 D.6

答案　B

解析　因为0<*m*<3,所以3-*m*>0,根据题意可得*m*2(3-*m*)=·*m*·*m*(6-2*m*)≤=4,

当且仅当*m*=6-2*m*,即*m*=2时,等号成立,

故*m*2(3-*m*)的最大值为4.

16.(12分)某博物馆为了保护一件珍贵文物,需要在一种透明又密封的长方体玻璃保护罩内充入保护液体.该博物馆需要支付保护这件文物的总费用由两部分组成:①罩内该种液体的体积比保护罩的容积少0.5立方米,且每立方米液体费用为2000元;②需支付一定的保险费用,且支付的保险费用与保护罩容积成反比,当容积为4立方米时,支付的保险费用为18000元.(长方体保护罩最大容积为10立方米)

(1)求该博物馆需支付保护这件文物的总费用*y*与保护罩容积*x*之间的函数关系式;(6分)

(2)求该博物馆支付总费用的最小值,并求出此时长方体保护罩的容积.(6分)

解　(1)设保险费用为*y*1=,

代入*x*=4,*y*1=18000,解得*t*=72000,则总费用

*y*=2000(*x*-0.5)+(0.5<*x*≤10),

即*y*=2000*x*+-1000(0.5<*x*≤10).

(2)由基本不等式可得

*y*=2000*x*+-1000

≥2-1000

=24000-1000=23000,

当且仅当2000*x*=,

即*x*=6时,等号成立,

且*x*=6在定义域范围内.故当长方体保护罩容积为6立方米时,总费用最小,最小值为23000元.