## 培优课　不等式恒成立、能成立问题

在面临不等式恒成立、能成立的问题时,常常使用不等式解集法、分离参数法、主参换位法和数形结合法解决,方法灵活,能提升学生的逻辑推理、数学运算等素养.

一、在R上的恒成立问题

例1　(1)已知不等式*kx*2+2*kx*-(*k*+2)<0恒成立,求实数*k*的取值范围;

(2)若不等式-*x*2+2*x*+3≤*a*2-3*a*对任意实数*x*恒成立,求实数*a*的取值范围.

解　(1)当*k*=0时,原不等式化为-2<0,显然符合题意.

当*k*≠0时,令*y*=*kx*2+2*kx*-(*k*+2),由*y*<0恒成立,

∴其图象都在*x*轴的下方,即开口向下,且与*x*轴无交点.∴解得-1<*k*<0.

综上,实数*k*的取值范围是{*k*|-1<*k*≤0}.

(2)原不等式可化为*x*2-2*x*+*a*2-3*a*-3≥0,

∵该不等式对任意实数*x*恒成立,∴*Δ*≤0,

即4-4(*a*2-3*a*-3)≤0,即*a*2-3*a*-4≥0,

解得*a*≤-1或*a*≥4,

∴实数*a*的取值范围是{*a*|*a*≤-1或*a*≥4}.

反思感悟　转化为一元二次不等式解集为**R**的情况,即*ax*2+*bx*+*c*>0(*a*≠0)恒成立⇔

*ax*2+*bx*+*c*<0(*a*≠0)恒成立⇔

*ax*2+*bx*+*c*≥0(*a*≠0)恒成立⇔

*ax*2+*bx*+*c*≤0(*a*≠0)恒成立⇔

注意:若题目中未强调是一元二次不等式,且二次项系数含参,则一定要讨论二次项系数是否为0.

跟踪训练1　若关于*x*的不等式*kx*2+3*kx*+*k*-2>0的解集为∅,则实数*k*的取值范围是(　　)

A. B.

C. D.

答案　D

解析　当*k*=0时,-2>0无解,符合题意;

当*k*≠0时,需满足*k*<0且9*k*2-4*k*(*k*-2)=5*k*2+8*k*≤0,得-≤*k*<0,

综上,*k*的取值范围为.

二、在给定区间上恒成立的问题

例2　当1≤*x*≤2时,不等式*x*2+*mx*+4<0恒成立,则实数*m*的取值范围为　　　　.

答案　{*m*|*m*<-5}

解析　令*y*=*x*2+*mx*+4.



∵*y*<0在1≤*x*≤2上恒成立.

∴*y*=0的根一个小于1,另一个大于2.

如图,可得

∴*m*的取值范围是{*m*|*m*<-5}.

例3　设函数*y*=*mx*2-*mx*-1,1≤*x*≤3,若*y*<-*m*+5恒成立,则实数*m*的取值范围为　　　　.

答案

解析　*y*<-*m*+5在1≤*x*≤3上恒成立,

即*m*(*x*2-*x*+1)-6<0恒成立,

∵*x*2-*x*+1=+>0,

∴*m*<.

令*t*==,

*t*在1≤*x*≤3上的最小值为,

∴只需*m*<即可.

故实数*m*的取值范围为.

反思感悟　在给定区间上的恒成立问题

(1)当*a*>0时,*ax*2+*bx*+*c*<0在*x*∈{*x*|*α*≤*x*≤*β*}上恒成立⇔*y*=*ax*2+*bx*+*c*在*x*=*α*,*x*=*β*时的函数值同时小于0;当*a*<0时,*ax*2+*bx*+*c*>0在*x*∈{*x*|*α*≤*x*≤*β*}上恒成立⇔*y*=*ax*2+*bx*+*c*在*x*=*α*,*x*=*β*时的函数值同时大于0.

(2)通过分离参数将不等式恒成立问题转化为求函数的最值问题.

跟踪训练2　若对任意的-3≤*x*≤-1都有*ax*2-*x*-3<0成立,则实数*a*的取值范围是　　　.

答案　{*a*|*a*<0}

解析　*ax*2-*x*-3<0在-3≤*x*≤-1上恒成立,等价于*a*<=+在-1≤≤-上恒成立,令*m*=,即*a*<3*m*2+*m*在-1≤*m*≤-上恒成立,二次函数*y*=3*m*2+*m*的对称轴为*m*=-,所以当*m*=-时,*y*有最小值0,故*a*<0.

三、简单的能成立问题

例4　若存在*x*∈**R**,使得≥2成立,求实数*m*的取值范围.

解　∵*x*2-2*x*+3=(*x*-1)2+2>0,

∴4*x*+*m*≥2(*x*2-2*x*+3)能成立,

∴*m*≥2*x*2-8*x*+6能成立,

令*y*=2*x*2-8*x*+6=2(*x*-2)2-2≥-2,

∴*m*≥-2,∴*m*的取值范围为{*m*|*m*≥-2}.

反思感悟　能成立问题的解题思路

(1)结合二次函数图象,将问题转化为端点值的问题解决;

(2)对一些简单的问题,可转化为*m*>*y*min或*m*<*y*max的形式,通过求*y*的最小值与最大值,求得参数的取值范围.

跟踪训练3　若关于*x*的不等式*ax*2+*x*+1>0在*x*∈[1,2]上有解,则实数*a*的取值范围为　　　　.

答案　(-2,+∞)

解析　由*ax*2+*x*+1>0,得*ax*2>-*x*-1,

因为*x*∈[1,2],所以*a*>--有解,

令=*t*,则*t*∈,所以*a*>-*t*2-*t*,

即*a*>-+,

因为当*t*∈时,*y*=-+的最小值为-+=-2,所以*a*>-2.

D:\杂\word图标\word图标\课堂小结通.tif

1.知识清单:

(1)在R上的恒成立问题.

(2)给定区间上的恒成立问题.

(3)解决简单的能成立问题.

2.方法归纳:等价转换法、数形结合法.

3.常见误区:要注意端点值的取舍.



1.若关于*x*的不等式*x*2+*mx*+1≥0的解集为**R**,则实数*m*的取值范围是(　　)

A.{*m*|*m*≥2} B.{*m*|*m*≤-2}

C.{*m*|*m*≤-2或*m*≥2} D.{*m*|-2≤*m*≤2}

答案　D

解析　关于*x*的不等式*x*2+*mx*+1≥0的解集为**R**,则*Δ*=*m*2-4≤0,解得-2≤*m*≤2,∴实数*m*的取值范围是{*m*|-2≤*m*≤2}.

2.对于任意*x*∈**R**,都有意义,则*m*的取值范围是(　　)

A.{*m*|*m*≥2} B.{*m*|0<*m*≤2}

C.{*m*|0≤*m*≤2} D.{*m*|0≤*m*≤4}

答案　C

解析　令*y*=,

当*m*=0时,函数*y*=,符合题意;

当*m*≠0时,*mx*2+2*mx*+2≥0恒成立,

则即解得0<*m*≤2,

综上,0≤*m*≤2.

3.已知1≤*x*≤2,*x*2-*ax*>0恒成立,则实数*a*的取值范围是(　　)

A.{*a*|*a*≥1} B.{*a*|*a*>1}

C.{*a*|*a*≤1} D.{*a*|*a*<1}

答案　D

解析　因为1≤*x*≤2,故*x*>0,故*x*2-*ax*>0在1≤*x*≤2上恒成立等价于*x*-*a*>0在1≤*x*≤2上恒成立,故1-*a*>0,即*a*<1.

4.若命题“∃*x*∈**R**,*x*2-2*mx*+*m*+2<0”为真命题,则实数*m*的取值范围是　　　　.

答案　{*m*|*m*<-1或*m*>2}

解析　“∃*x*∈**R**,*x*2-2*mx*+*m*+2<0”为真命题,

故*Δ*=4*m*2-4(*m*+2)>0,解得*m*<-1或*m*>2.

## 课时对点练　[分值:100分]

单选题每小题5分,共40分;多选题每小题6分,共6分



1.一元二次不等式*ax*2+*bx*+*c*<0的解集为全体实数的条件是(　　)

A. B.

C. D.

答案　D

解析　一元二次不等式*ax*2+*bx*+*c*<0的解集为全体实数等价于二次函数*y*=*ax*2+*bx*+*c*的图象全部在*x*轴下方,需要开口向下,且与*x*轴无交点,故需要

2.若关于*x*的不等式-*x*2+*mx*-1≥0有解,则实数*m*的取值范围是(　　)

A.{*m*|*m*≤-2或*m*≥2}

B.{*m*|-2≤*m*≤2}

C.{*m*|*m*<-2或*m*>2}

D.{*m*|-2<*m*<2}

答案　A

解析　因为关于*x*的不等式-*x*2+*mx*-1≥0有解,所以*Δ*=*m*2-4≥0,解得*m*≥2或*m*≤-2.

3.已知不等式*x*2+*ax*+4<0的解集为空集,则*a*的取值范围是(　　)

A.{*a*|-4≤*a*≤4} B.{*a*|-4<*a*<4}

C.{*a*|*a*≤-4或*a*≥4} D.{*a*|*a*<-4或*a*>4}

答案　A

解析　由题意得,*Δ*=*a*2-16≤0,解得-4≤*a*≤4.

4.若关于*x*的不等式*x*2-(*m*+1)*x*+9≤0在[1,4]上有解,则实数*m*的最小值为(　　)

A.9 B.5 C.6 D.

答案　B

解析　因为*x*2-(*m*+1)*x*+9≤0在[1,4]上有解,所以*m*+1≥*x*+在[1,4]上有解,所以*m*+1≥(*x*∈[1,4]),又因为*x*+≥2=6,当且仅当*x*=,即*x*=3时取等号,所以*m*+1≥6,即实数*m*的最小值为5.

5.若两个正实数*x*,*y*满足+=1,且不等式*x*+<*m*2-3*m*有解,则实数*m*的取值范围是(　　)

A.{*m*|-1<*m*<4}

B.{*m*|*m*<0或*m*>3}

C.{*m*|-4<*m*<1}

D.{*m*|*m*<-1或*m*>4}

答案　D

解析　因为正实数*x*,*y*满足+=1,

所以*x*+==2++

≥2+2=4,

当且仅当*x*=2,*y*=8时,*x*+取得最小值4,

由*x*+<*m*2-3*m*有解,可得*m*2-3*m*>4,

解得*m*>4或*m*<-1.

6.(多选)关于*x*的不等式*ax*2-2*x*+1<0的解集非空的一个必要且不充分条件是(　　)

A.*a*<1 B.*a*≤1

C.*a*<2 D.*a*<0

答案　BC

解析　∵*ax*2-2*x*+1<0的解集非空,显然*a*≤0成立,由∴0<*a*<1,综上,*ax*2-2*x*+1<0的解集非空的充要条件为*a*<1,结合选项可知B,C正确.

7.(5分)若关于*x*的不等式*x*2+(*m*-3)*x*+*m*<0无解,则实数*m*的取值范围是　　　　.

答案　{*m*|1≤*m*≤9}

解析　∵*x*2+(*m*-3)*x*+*m*<0无解,

∴*Δ*=(*m*-3)2-4*m*=*m*2-10*m*+9≤0,

解得1≤*m*≤9.

8.(5分)若关于*x*的不等式*x*2-4*x*-2-*a*≥0在{*x*|1≤*x*≤4}上有解,则实数*a*的取值范围是　　　　.

答案　{*a*|*a*≤-2}

解析　由*x*2-4*x*-2-*a*≥0,

得*a*≤*x*2-4*x*-2=(*x*-2)2-6,

所以当1≤*x*≤4时,(*x*-2)2-6∈[-6,-2],

所以*a*≤-2.

9.(10分)已知对∀*x*∈{*x*|2≤*x*≤3},不等式*mx*2-*mx*-1<0恒成立,求*m*的取值范围.

解　由不等式*mx*2-*mx*-1<0,得*m*(*x*2-*x*)<1,

因为*x*∈{*x*|2≤*x*≤3},所以*x*2-*x*>0,

所以*m*(*x*2-*x*)<1可化为*m*<,

因为*x*2-*x*=-≤6,

所以≥,所以*m*<.

即*m*的取值范围是.

10.(12分)设函数*y*=2*x*2+*bx*+*c*.已知关于*x*的不等式*y*<20的解集为(-4,1),

(1)求函数的解析式;(6分)

(2)若关于*x*的方程*y*<*mx*在区间(2,4)内有解,求实数*m*的取值范围.(6分)

解　(1)不等式*y*<20的解集为(-4,1),

即2*x*2+*bx*+*c*-20<0的解集为(-4,1),

∴-4和1是方程2*x*2+*bx*+*c*-20=0的两个根,

由根与系数的关系可得

解得*b*=6,*c*=12,

∴*y*=2*x*2+6*x*+12.

(2)∵关于*x*的方程*y*<*mx*在区间(2,4)内有解,

∴*m*>2*x*++6在区间(2,4)内有解,

当*x*∈(2,4)时,2*x*++6≥2+6=4+6,当且仅当*x*=时,等号成立,

∴实数*m*的取值范围为(4+6,+∞).



11.命题*p*:∃*x*0∈(0,+∞),使得-*λx*0+1<0成立.若*p*是假命题,则实数*λ*的取值范围是(　　)

A.(-∞,2] B.[2,+∞)

C.[-2,2] D.(-∞,-2]∪[2,+∞)

答案　A

解析　因为命题*p*:∃*x*0∈(0,+∞),使得-*λx*0+1<0成立,

所以命题*p*的否定:∀*x*∈(0,+∞),*x*2-*λx*+1≥0成立,

而*p*是假命题,故命题*p*的否定为真命题.

所以*λ*≤*x*+在*x*∈(0,+∞)上恒成立,

因为*x*+≥2=2,当且仅当*x*=,即*x*=1时,等号成立,

所以*λ*≤2,即*λ*∈(-∞,2].

12.在**R**上定义运算:*x*⊗*y*=*x*(1-*y*),若∃*x*∈R使得(*x*-*a*)⊗(*x*+*a*)>1成立,则实数*a*的取值范围是(　　)

A.

B.

C.

D.

答案　A

解析　由题意知

(*x*-*a*)⊗(*x*+*a*)=(*x*-*a*)[1-(*x*+*a*)]

=-*x*2+*x*+*a*2-*a*=-+*a*2-*a*+,

若∃*x*∈**R**,使得不等式(*x*-*a*)⊗(*x*+*a*)>1成立,则需函数*y*=-+*a*2-*a*+的最大值大于1,

即当*x*=时,*y*=*a*2-*a*+>1成立,

解得*a*<-或*a*>.

13.对任意*x*满足-1≤*x*≤2,不等式*x*2-2*x*+*a*<0成立的必要且不充分条件是(　　)

A.*a*<-3 B.*a*<-4

C.*a*<0 D.*a*>0

答案　C

解析　因为*x*2-2*x*+*a*<0,所以*a*<-*x*2+2*x*,

又因为-1≤*x*≤2,-*x*2+2*x*=-*x*(*x*-2)≥-3,

所以*a*<-3,

结合选项可知,对任意*x*满足-1≤*x*≤2,不等式*x*2-2*x*+*a*<0成立的必要且不充分条件为*a*<0.

14.(5分)若存在1≤*a*≤3,使得不等式*ax*2+(*a*-2)*x*-2>0成立,则实数*x*的取值范围为　　　　.

答案

解析　令*y*=*ax*2+(*a*-2)*x*-2=(*x*2+*x*)*a*-2*x*-2,是关于*a*的函数,由题意得

(*x*2+*x*)-2*x*-2>0或

(*x*2+*x*)·3-2*x*-2>0.

即*x*2-*x*-2>0①,或3*x*2+*x*-2>0②.

解①可得*x*<-1或*x*>2.

解②可得*x*<-1或*x*>.

把①②的解集取并集可得*x*<-1或*x*>.



15.(5分)关于*x*的不等式(*a*2-1)*x*2-(*a*-1)*x*-1≤0的解集为**R**,则实数*a*的取值范围是　　　　.

答案

解析　当*a*2-1=0时,*a*=1或*a*=-1,

若*a*=1,不等式为-1≤0恒成立,符合题意,

若*a*=-1,不等式为2*x*-1≤0,

解得*x*≤,不符合题意;

当*a*2-1≠0时,

若要不等式(*a*2-1)*x*2-(*a*-1)*x*-1≤0的解集为**R**,

则*a*2-1<0,且*Δ*=(*a*-1)2+4(*a*2-1)≤0,

解得-≤*a*<1,综上可得-≤*a*≤1.

16.(12分)不等式*x*2+8*y*2≥*λy*(*x*+*y*)对于任意的*x*,*y*∈**R**恒成立,求实数*λ*的取值范围.

解　因为*x*2+8*y*2≥*λy*(*x*+*y*)对于任意的*x*,*y*∈**R**恒成立,

所以*x*2+8*y*2-*λy*(*x*+*y*)≥0对于任意的*x*,*y*∈**R**恒成立,

即*x*2-*λyx*+(8-*λ*)*y*2≥0恒成立,

由二次不等式的性质可得,

*Δ*=*λ*2*y*2+4(*λ*-8)*y*2=*y*2(*λ*2+4*λ*-32)≤0,

所以(*λ*+8)(*λ*-4)≤0,解得-8≤*λ*≤4.

即实数*λ*的取值范围为{*λ*|-8≤*λ*≤4}.