**江苏省仪征中学2023-2024学年第二学期高一数学周末练习10**

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知复数*z*满足$z⋅i=1+2i(i$为虚数单位$)$，则复数*z*的虚部是(    )

A. 2 B. $−2$ C. 1 D. $−1$

2.一支田径队有男运动员$56$人，女运动员$42$人，按性别进行分层，用分层随机抽样的方法从全体运动员中抽出一个容量为$N$的样本，如果样本按比例分配，男运动员抽取的人数为$16$人，则$N$为(    )

A. $16$ B. $20$ C. $24$ D. $28$

3.函数$f(x)=\sqrt[ ]{3}sinx−cosx$图象的一条对称轴方程为(    )

A. $x=\frac{π}{6}$ B. $x=\frac{π}{3}$ C. $x=\frac{2π}{3}$ D. $x=\frac{7π}{6}$

4.某班级共有$52$位同学，现随机抽取$8$位同学参加学校组织的“校园读书节”活动，老师将班级同学进行编号：$01$，$02$，$03$，$\cdots $，$52$，若从随机数表的第$3$行第$27$列开始，依次往右读数，直到取足样本为止，则第$6$位被抽到的同学对应的编号为(    )

|  |
| --- |
| $$95 33 95 22 00 18 74 72 00 18 38 79 58 69 32 81 76 80 26 92 82 80 84 25 39$$$$90 84 60 79 80 24 36 59 87 38 82 07 53 89 35 56 35 23 79 18 05 98 90 07 35$$$$46 40 62 98 80 54 97 20 56 95 15 74 80 08 32 16 46 70 50 80 67 72 16 42 79$$$$20 31 89 03 43 38 46 82 68 72 32 14 82 99 70 80 60 47 18 97 63 49 30 21 30$$$$71 59 73 05 50 08 22 23 71 77 91 01 93 20 49 82 96 59 26 94 66 39 67 98 60$$ |

A. $16$ B. $42$ C. $50$ D. $80$

5.如图，直三棱柱$ABC−A\_{1}B\_{1}C\_{1}$中，*D*是$CC\_{1}$的中点，则$\frac{V\_{D−A\_{1}B\_{1}C\_{1}}}{V\_{D−ABB\_{1}A\_{1}}}=$(    )

A. $\frac{1}{6}$
B. $\frac{1}{5}$
C. $\frac{1}{4}$
D. $\frac{2}{3}$

6.若$sin(α+\frac{π}{4})=\frac{1}{3}$，则$sin2α=$(    )

A. $−\frac{7}{9}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $\frac{1−\sqrt[ ]{2}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt[ ]{2}}{3}$

7.若一个圆台的高为$\sqrt[ ]{3}$，母线长为2，侧面积为$6π$，则该圆台的体积为(    )

A. $\frac{5\sqrt[ ]{3}π}{3}$ B. $\frac{7\sqrt[ ]{3}π}{3}$ C. $5\sqrt[ ]{3}π$ D. $7\sqrt[ ]{3}π$

8.$△ABC$中，若*A*，$B\in (0,\frac{π}{2})$，$sinC=sinAsinB$，则$tan(A+B)$的取值范围是(    )

A. $[−\frac{4}{3},−1)$ B. $[−\frac{4}{3},−1]$ C. $(1,\frac{4}{3}]$ D. $[1,\frac{4}{3}]$

二、多选题：本题共**3**小题，共**18**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得**6**分，部分选对的得**2**分，有选错的得**0**分。

9.下列各式中，值为$\frac{1}{2}$的是(    )

A. $sin\frac{5π}{6}$ B. $2sin15^{∘}cos15^{∘}$ C. $2cos^{2}15^{∘}−1$ D. $\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}tan210^{∘}$

10.若$z\_{1}$，$z\_{2}$，$z\_{3}$，为复数，$z\_{1}\ne 0$，下列命题正确的是(    )

A. 若$\overset{−}{z\_{3}}=\overset{−}{z\_{2}}$，则$|z\_{2}|=|z\_{3}|$ B. 若$z\_{3}=\frac{z\_{2}}{z\_{1}}$，则$|z\_{3}|=\frac{|z\_{2}|}{|z\_{1}|}$
C. 若$|z\_{2}|>|z\_{3}|$，则$z\_{2}>z\_{3}$ D. 若$z\_{1}z\_{2}=0$，则$z\_{2}=0$

11.如图，多面体*ABCDEF*的8个面都是边长为2的正三角形，则(    )


A. $AE//CF$ B. 平面$EAB⊥$平面*FAB*
C. 直线*EA*与平面*ABCD*所成的角为$\frac{π}{4}$ D. 点*E*到平面*ABF*的距离为$\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}$

三、填空题：本题共**3**小题，每小题**5**分，共**15**分。

12.函数$y=sin\left(\frac{π}{2}x−\frac{π}{4}\right)$的部分图象如图所示，则$\vec{OB}⋅\vec{OC}=$           ．


13.设 *i*为虚数单位，复数$z=cosθ+isinθ(θ\in R)$，则$|z−1|$的最大值为\_\_\_\_\_\_.

14.在$ΔABC$中，角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，若$a=2$，且$(2+c)(sinA−sinC)=b(sinB−sinC)$，则*BC*边上的高的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共**5**小题，共**77**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.$($本小题13分$)$
已知向量$\vec{a}=(\sqrt[ ]{3},1)$，$\vec{a}⋅\vec{b}=4.$
$(1)$当$|\vec{b}|=4$，求$|\vec{a}+\vec{b}|$；
$(2)$求$|\vec{b}|$的最小值，并求此时向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角大小.

16.$($本小题15分$)$
如图，*P*是正方形*ABCD*所在平面外一点，$PA=PC=AB=2$，且平面$PAC⊥$平面*ABCD*，*E*，*F*分别是线段*AB*，*PC*的中点．
$(1)$求证：$BD⊥PC$；
$(2)$求证：$EF//$平面*PAD*；
$(3)$求点*E*到平面*PAD*的距离．

17.$($本小题15分$)$
在$△ABC$中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，且$\frac{sinA+sinB}{sinC}=\frac{c+b}{a−b}.$
$(1)$若$a=2\sqrt[ ]{3}$，$b=2$，求角*B*；
$(2)$设$∠BAC$的角平分线*AD*交*BC*于点*D*，若$△ABC$面积为$\sqrt[ ]{3}$，求*AD*长的最大值.

1. $($本小题17分$)$
如图，在正三棱台$ABC−A\_{1}B\_{1}C\_{1}$中，底面*ABC*是边长为4的正三角形，且$AA\_{1}=B\_{1}C\_{1}=2.$
$(1)$证明：$AA\_{1}⊥BC$；
$(2)$求异面直线$A\_{1}B$，$B\_{1}C$所成角的余弦值.

 

19.$($本小题17分$)$
由两角和差公式我们得到倍角公式$cos2θ=2cos^{2}θ−1$，实际上$cos3θ$也可以表示为$cosθ$的三次多项式.
$(1)$试用$cosθ$表示$cos3θ$；
$(2)$求$sin18^{∘}$的值；
$(3)$已知方程$4x^{3}−3x−\frac{1}{2}=0$在$(−1,1)$上有三个根，记为$x\_{1}$，$x\_{2}$，$x\_{3}$，求证：$4x\_{1}^{3}+4x\_{2}^{3}+4x\_{3}^{3}=\frac{3}{2}.$

**江苏省仪征中学2023-2024学年第二学期高一数学周末练习10**

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知复数*z*满足$z⋅i=1+2i(i$为虚数单位$)$，则复数*z*的虚部是(    )

A. 2 B. $−2$ C. 1 D. $−1$

【答案】*D*

【解析】解：$∵$复数*z*满足$z⋅i=1+2i(i$为虚数单位$)$，$∴z=\frac{1+2i}{i}=2−i$，$∴$复数*z*的虚部是$−1$，
2.一支田径队有男运动员$56$人，女运动员$42$人，按性别进行分层，用分层随机抽样的方法从全体运动员中抽出一个容量为$N$的样本，如果样本按比例分配，男运动员抽取的人数为$16$人，则$N$为(    )

A. $16$ B. $20$ C. $24$ D. $28$

【答案】*D*

【解答】解：依题意$\frac{16}{N}=\frac{56}{56+42}⇒N=\frac{16×98}{56}=28$．
3.函数$f(x)=\sqrt[ ]{3}sinx−cosx$图象的一条对称轴方程为(    )

A. $x=\frac{π}{6}$ B. $x=\frac{π}{3}$ C. $x=\frac{2π}{3}$ D. $x=\frac{7π}{6}$

【答案】*C*

【解析】解：$f(x)=\sqrt[ ]{3}sinx−cosx=2sin(x−\frac{π}{6})$，
令$x−\frac{π}{6}=\frac{π}{2}+kπ,k\in Z$，即$x=\frac{2π}{3}+kπ,k\in Z$，故函数图象的一条对称轴方程为$x=\frac{2π}{3}.$
4.某班级共有$52$位同学，现随机抽取$8$位同学参加学校组织的“校园读书节”活动，老师将班级同学进行编号：$01$，$02$，$03$，$\cdots $，$52$，若从随机数表的第$3$行第$27$列开始，依次往右读数，直到取足样本为止，则第$6$位被抽到的同学对应的编号为(    )

|  |
| --- |
| $$95 33 95 22 00 18 74 72 00 18 38 79 58 69 32 81 76 80 26 92 82 80 84 25 39$$$$90 84 60 79 80 24 36 59 87 38 82 07 53 89 35 56 35 23 79 18 05 98 90 07 35$$$$46 40 62 98 80 54 97 20 56 95 15 74 80 08 32 16 46 70 50 80 67 72 16 42 79$$$$20 31 89 03 43 38 46 82 68 72 32 14 82 99 70 80 60 47 18 97 63 49 30 21 30$$$$71 59 73 05 50 08 22 23 71 77 91 01 93 20 49 82 96 59 26 94 66 39 67 98 60$$ |

A. $16$ B. $42$ C. $50$ D. $80$

【答案】*B*

【解答】解：某班级共有$52$位同学生，将每一学生编号从$01$到$52$，
从随机数表的第$3$行第$27$列开始，依次向右，直到取足样本，
依次取到的前$6$个编号分别为：$08$，$32$，$16$，$46$，$50$，$42$，则第$6$位被抽到的同学对应的编号为$42$．
5.如图，直三棱柱$ABC−A\_{1}B\_{1}C\_{1}$中，*D*是$CC\_{1}$的中点，则$\frac{V\_{D−A\_{1}B\_{1}C\_{1}}}{V\_{D−ABB\_{1}A\_{1}}}=$(    )

A. $\frac{1}{6}$
B. $\frac{1}{5}$
C. $\frac{1}{4}$
D. $\frac{2}{3}$

【答案】*C* 【解析】解：因为*D*是$CC\_{1}$的中点，
所以$V\_{D−A\_{1}B\_{1}C\_{1}}=V\_{D−ABC}=\frac{1}{6}V\_{ABC−A\_{1}B\_{1}C\_{1}}$，
所以$V\_{D−ABB\_{1}A\_{1}}=V\_{ABC−A\_{1}B\_{1}C\_{1}}−V\_{D−A\_{1}B\_{1}C\_{1}}−V\_{D−ABC}=\frac{2}{3}V\_{ABC−A\_{1}B\_{1}C\_{1}}$，则$\frac{V\_{D−A\_{1}B\_{1}C\_{1}}}{V\_{D−ABB\_{1}A\_{1}}}=\frac{1}{4}.$
6.若$sin(α+\frac{π}{4})=\frac{1}{3}$，则$sin2α=$(    )

A. $−\frac{7}{9}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $\frac{1−\sqrt[ ]{2}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt[ ]{2}}{3}$

【答案】*A*

【解析】解：$∵sin(α+\frac{π}{4})=\frac{1}{3}$，$∴\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}sinα+\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}cosα=\frac{1}{3}$，$∴sinα+cosα=\frac{\sqrt[ ]{2}}{3}$，
$∴1+2sinαcosα=\frac{2}{9}$，即$sin2α=−\frac{7}{9}$，
7.若一个圆台的高为$\sqrt[ ]{3}$，母线长为2，侧面积为$6π$，则该圆台的体积为(    )

A. $\frac{5\sqrt[ ]{3}π}{3}$ B. $\frac{7\sqrt[ ]{3}π}{3}$ C. $5\sqrt[ ]{3}π$ D. $7\sqrt[ ]{3}π$

【答案】*B*

【解析】解：设圆台的两底面半径分别为$r\_{1}$，$r\_{2}$，则侧面积$π(r\_{1}+r\_{2})l=π(r\_{1}+r\_{2})×2=6π$，
$∴r\_{1}+r\_{2}=3$，
又圆台的高为$\sqrt[ ]{3}$，母线长为2，$∴ℎ^{2}+(r\_{1}−r\_{2})^{2}=l^{2}$，即$3+(r\_{1}−r\_{2})^{2}=4$，$∴(r\_{1}−r\_{2})^{2}=1$，
$∴2(r\_{1}^{2}+r\_{2}^{2})=(r\_{1}−r\_{2})^{2}+(r\_{1}+r\_{2})^{2}=9+1=10$，$∴r\_{1}^{2}+r\_{2}^{2}=5$，
$∴(r\_{1}+r\_{2})^{2}−(r\_{1}−r\_{2})^{2}=4r\_{1}r\_{2}=8$，$r\_{1}r\_{2}=2$
$∴$圆台的上下底面积的和为$S\_{1}+S\_{2}=πr\_{1}^{2}+πr\_{2}^{2}=5π$，$\sqrt[ ]{S\_{1}S\_{2}}=2π$，
所以圆台的体积$V=\frac{1}{3}(5π+2π)×\sqrt[ ]{3}=\frac{7\sqrt[ ]{3}}{3}π$，
8.$△ABC$中，若*A*，$B\in (0,\frac{π}{2})$，$sinC=sinAsinB$，则$tan(A+B)$的取值范围是(    )

A. $[−\frac{4}{3},−1)$ B. $[−\frac{4}{3},−1]$ C. $(1,\frac{4}{3}]$ D. $[1,\frac{4}{3}]$

【答案】*B*

【解析】解：因为$sinC=sin(A+B)=sinAsinB$，
所以$sinAcosB+cosAsinB=sinAsinB$，
因为*A*，$B\in (0,\frac{π}{2})$，即$cosAcosB\ne 0$，
所以上式两边同时除以$cosAcosB$，可得$tanA+tanB=tanAtanB$，
令$tanA=x$，$tanB=y$，
则$x>0$，$y>0$，可得$x+y=xy\geq 2\sqrt[ ]{xy}$，可得$xy\geq 4$，当且仅当$x=y$时，等号成立，
所以$0<\frac{1}{xy}\leq \frac{1}{4}$，可得$−1<\frac{1}{xy}−1\leq −\frac{3}{4}$，可得$\frac{1}{\frac{1}{xy}−1}\in [−\frac{4}{3},−1),$
所以$tan(A+B)=\frac{tanA+tanB}{1−tanAtanB}=\frac{x+y}{1−xy}=\frac{xy}{1−xy}=\frac{1}{\frac{1}{xy}−1}\in [−\frac{4}{3},−1).$
二、多选题：本题共**3**小题，共**18**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得**6**分，部分选对的得**2**分，有选错的得**0**分。

9.下列各式中，值为$\frac{1}{2}$的是(    )

A. $sin\frac{5π}{6}$ B. $2sin15^{∘}cos15^{∘}$ C. $2cos^{2}15^{∘}−1$ D. $\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}tan210^{∘}$

【答案】*ABD*

【解答】解：$A:sin\frac{5π}{6}=sin\frac{π}{6}=\frac{1}{2}$，正确$;$
$B:2sin15^{∘}cos15^{∘}=sin30^{∘}=\frac{1}{2}$，正确$;$
$C:2cos^{2}15^{∘}−1=cos30^{∘}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，不正确$;$
$D:\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}tan210^{∘}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}tan30^{∘}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}×\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}=\frac{1}{2}$，正确，故选*ABD*．

10.若$z\_{1}$，$z\_{2}$，$z\_{3}$，为复数，$z\_{1}\ne 0$，下列命题正确的是(    )

A. 若$\overset{−}{z\_{3}}=\overset{−}{z\_{2}}$，则$|z\_{2}|=|z\_{3}|$ B. 若$z\_{3}=\frac{z\_{2}}{z\_{1}}$，则$|z\_{3}|=\frac{|z\_{2}|}{|z\_{1}|}$
C. 若$|z\_{2}|>|z\_{3}|$，则$z\_{2}>z\_{3}$ D. 若$z\_{1}z\_{2}=0$，则$z\_{2}=0$

【答案】*ABD*

【解答】解：对于*A*，$\overset{−}{z\_{3}}=\overset{−}{z\_{2}}$，
则$|\overset{−}{z\_{3}}|=|\overset{−}{z\_{2}}|$，故$|z\_{2}|=|z\_{3}|$，故*A*正确；
对于*B*，$z\_{3}=\frac{z\_{2}}{z\_{1}}$，则由复数模的性质可知，$|z\_{3}|=|\frac{z\_{2}}{z\_{1}}|=\frac{|z\_{2}|}{|z\_{1}|}$，故*B*正确；
对于*C*，当$z\_{2}$，$z\_{3}$为虚数时，不能比较大小，故*C*错误；
对于*D*，$z\_{1}z\_{2}=0$，则$|z\_{1}z\_{2}|=|z\_{1}||z\_{2}|=0$，
$∵z\_{1}\ne 0$，$∴z\_{2}=0$，故*D*正确．故选：$ABD.$

11.如图，多面体*ABCDEF*的8个面都是边长为2的正三角形，则(    )


A. $AE//CF$ B. 平面$EAB⊥$平面*FAB*
C. 直线*EA*与平面*ABCD*所成的角为$\frac{π}{4}$ D. 点*E*到平面*ABF*的距离为$\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}$

【答案】*ACD*

【解答】解：如图，由$△BAE$，$△BEC$，$△BCF$，$△BFA$为正三角形，
连接*AC*，*BD*，交于点*O*，连接*EO*，取*AB*中点为*M*，连接*OM*，
则$EO⊥AC$，$EO⊥BD$，$AC∩BD=O$，*AC*，$BD⊂$平面*ABCD*，所以$EO⊥$平面*ABCD*，同理$FO⊥$平面*ABCD*，即$EF⊥$平面*ABCD*，
*OA*，$OM⊂$平面*ABCD*，则$EO⊥OM$，$EO⊥OA$，则$EM=\sqrt[ ]{3}$，$EO==\sqrt[ ]{3−1}=\sqrt[ ]{2}$，则$OA==\sqrt[ ]{4−2}=\sqrt[ ]{2}=OC$，则$AE^{2}+EC^{2}=AC^{2}$，可得*AECF*为正方形，故$AE//CF$，故*A*正确;

因为*AB*中点为*M*，则$EM⊥AB,FM⊥AB,∠EMF$为二面角$E−AB−F$的平面角，由



$EM=FM=\sqrt[ ]{3}$，$EF=2EO=2\sqrt[ ]{2}$，得$∠EMF\ne 90^{∘}$，故*B*错误;
$∵EF⊥$面*ABCD*，

$∴∠EAC$为直线*EA*与平面*ABCD*所成的角，由$EA=EC=2$，$AC=2\sqrt[ ]{2}$，得$∠EAC=\frac{π}{4}$，故*C*正确;
设点*E*到平面*ABF*的距离为*h*，
又$EO⊥AC$，$AC⊥BD$，$EO∩BD=O$，*EO*，$BD⊂$平面*EBFD*，则$AC⊥$面*EBFD*，
$∵△ABF$是边长为2的等边三角形，$△EBF$是直角边为2的等腰直角三角形，$∴S\_{△ABF}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{4}⋅4=\sqrt[ ]{3}$，$S\_{△EBF}=2$，
$V\_{E−ABF}=V\_{A−EBF}$，即$\frac{1}{3}S\_{△ABF}⋅ℎ=\frac{1}{3}S\_{△EBF}⋅\sqrt[ ]{2}$，得$ℎ=\frac{2\sqrt[ ]{2}}{\sqrt[ ]{3}}=\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}$故*D*正确.

三、填空题：本题共**3**小题，每小题**5**分，共**15**分。

12.函数$y=sin\left(\frac{π}{2}x−\frac{π}{4}\right)$的部分图象如图所示，则$\vec{OB}⋅\vec{OC}=$           ．


【答案】$\frac{17}{4}$

【解答】解：函数$y=sin\left(\frac{π}{2}x−\frac{π}{4}\right)$的最大值为$1$，最小值为$−1$，

由图象可得点$B$的纵坐标为$1$，点$C$的纵坐标为$−1$，

令$sin\left(\frac{π}{2}x−\frac{π}{4}\right)=1$，可得$\frac{π}{2}x−\frac{π}{4}=2kπ+\frac{π}{2}$，$k\in Z$，

所以$x=4k+\frac{3}{2}$，$k\in Z$，结合图象可得点$B$的坐标为$\left(\frac{3}{2},1\right)$，

令$sin\left(\frac{π}{2}x−\frac{π}{4}\right)=−1$，可得$\frac{π}{2}x−\frac{π}{4}=2kπ+\frac{3π}{2}$，$k\in Z$，

所以$x=4k+\frac{7}{2}$，$k\in Z$，结合图象可得点$C$的坐标为$\left(\frac{7}{2},−1\right)$，

所以$\vec{OB}=\left(\frac{3}{2},1\right)$，$\vec{OC}=\left(\frac{7}{2},−1\right)$，

所以$\vec{OB}⋅\vec{OC}=\frac{21}{4}−1=\frac{17}{4}$．

13.设 *i*为虚数单位，复数$z=cosθ+isinθ(θ\in R)$，则$|z−1|$的最大值为\_\_\_\_\_\_.

【答案】2

【解析】解：$z=cosθ+isinθ$，
则$|z−1|=|cosθ−1+isinθ|=\sqrt[ ]{(cosθ−1)^{2}+sin^{2}θ}=\sqrt[ ]{2−2cosθ}\leq \sqrt[ ]{4}=2$，当且仅当$cosθ=−1$时，等号成立，故$|z−1|$的最大值为$2.$故答案为：$2.$
14.在$ΔABC$中，角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，若$a=2$，且$(2+c)(sinA−sinC)=b(sinB−sinC)$，则*BC*边上的高的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】$\sqrt[ ]{3}$

【解答】解：因为$a=2$，且$(2+c)(sinA−sinC)=b(sinB−sinC)$，
所以由正弦定理化简可得$b^{2}+c^{2}−a^{2}=bc$，所以$cosA=\frac{b^{2}+c^{2}−a^{2}}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，
又$A\in (0,π)$，所以$A=\frac{π}{3}$，
则由余弦定理$a^{2}=b^{2}+c^{2}−2bccosA$，可得$4=b^{2}+c^{2}−bc\geq 2bc−bc=bc$，
当且仅当$b=c=2$时等号成立，所以$bc\leq 4$，
设*BC*边上的高为*h*，则由$\frac{1}{2}bcsinA=\frac{1}{2}aℎ$，可得$ℎ=\frac{\sqrt[ ]{3}}{4}bc\leq \sqrt[ ]{3}$，当且仅当$b=c=2$时等号成立，
所以*BC*边上的高的最大值为$\sqrt[ ]{3}.$故答案为：$\sqrt[ ]{3}.$

四、解答题：本题共**5**小题，共**77**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.$($本小题13分$)$
已知向量$\vec{a}=(\sqrt[ ]{3},1)$，$\vec{a}⋅\vec{b}=4.$
$(1)$当$|\vec{b}|=4$，求$|\vec{a}+\vec{b}|$；
$(2)$求$|\vec{b}|$的最小值，并求此时向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角大小.

【答案】解：$(1)$因为$\vec{a}=(\sqrt[ ]{3},1)$，所以$|\vec{a}|=2$，
所以$|\vec{a}+\vec{b}|^{2}=\vec{a}^{2}+2\vec{a}⋅\vec{b}+\vec{b}^{2}=4+2×4+16=28$，
所以$|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt[ ]{7}.$
$(2)$设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$θ$，则$θ\in [0,\frac{π}{2}),$
因为$\vec{a}⋅\vec{b}=|\vec{a}|⋅|\vec{b}|cosθ=2|\vec{b}|cosθ=4$，
所以$|\vec{b}|=\frac{2}{cosθ}\geq \frac{2}{1}=2$，当且仅当$θ=0$时，等号成立，
所以$|\vec{b}|$的最小值为2，此时向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角大小为$0.$

16.$($本小题15分$)$
如图，*P*是正方形*ABCD*所在平面外一点，$PA=PC=AB=2$，且平面$PAC⊥$平面*ABCD*，*E*，*F*分别是线段*AB*，*PC*的中点．
$(1)$求证：$BD⊥PC$；
$(2)$求证：$EF//$平面*PAD*；
$(3)$求点*E*到平面*PAD*的距离．

【答案】证明：$(1)$因为正方形$ABCD⇒BD⊥AC$，
又平面$PAC⊥$平面*ABCD*，平面$PAC∩$平面$ABCD=AC$，$BC⊂$平面*ABCD*，
所以$BD⊥$平面*PAC*，
因为$PC⊂$平面*PAC*，所以$BD⊥PC$；
证明：$(2)$取*PD*中点*G*，连接*FG*，*AG*，

在$△PDC$中，因为*F*，*G*分别是*PC*，*PD*的中点，
所以$FG//CD$，$FG=\frac{1}{2}CD$；
因为*E*是正方形*ABCD*边*AB*中点，
所以$AE//CD$，$AE=\frac{1}{2}CD$；
所以$AE//GF$，$AE=GF$，
即四边形*AEFG*是平行四边形，所以$EF//AG$，
又因为$AG⊂$平面*PAD*，$EF⊄$平面*PAD*，
故$EF//$平面*PAD*；
解：$(3)$如图，设$AC∩BD=O$，连接*PO*，

因为$PA=PC=2$，*O*为*AC*中点，
所以$PO⊥AC$，
又平面$PAC⊥$平面*ABCD*，平面$PAC∩$平面$ABCD=AC$，$PO⊂$平面*PAC*，
故$PO⊥$平面*ABCD*，即*PO*是三棱锥$P−ADE$的高；
由正方形*ABCD*边$AB=2⇒AO=OD=\sqrt[ ]{2}$，所以$PO=\sqrt[ ]{PA^{2}−OA^{2}}=\sqrt[ ]{2}$；
因为$Rt△POD≌Rt△POA$，所以$PA=PD=2$，
设点*E*到平面*PAD*的距离为*d*，
因为$V\_{E−PAD}=V\_{P−ADE}⇒\frac{1}{3}S\_{△PAD}⋅d=\frac{1}{3}S\_{△ADE}⋅PO$，
即$\frac{\sqrt[ ]{3}}{4}×4×d=\frac{1}{2}×2×1×\sqrt[ ]{2}$，解得$d=\frac{\sqrt[ ]{6}}{3}$，
所以点*E*到平面*PAD*的距离为$\frac{\sqrt[ ]{6}}{3}.$

17.$($本小题15分$)$
在$△ABC$中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，且$\frac{sinA+sinB}{sinC}=\frac{c+b}{a−b}.$
$(1)$若$a=2\sqrt[ ]{3}$，$b=2$，求角*B*；
$(2)$设$∠BAC$的角平分线*AD*交*BC*于点*D*，若$△ABC$面积为$\sqrt[ ]{3}$，求*AD*长的最大值.

【答案】解：$(1)∵\frac{sinA+sinB}{sinC}=\frac{c+b}{a−b}$，
$∴$正弦定理可得：$\frac{a+b}{c}=\frac{c+b}{a−b}⇒a^{2}−b^{2}=bc+c^{2}$，
$∴b^{2}+c^{2}−a^{2}=−bc$，
$∴cosA=\frac{b^{2}+c^{2}−a^{2}}{2bc}=\frac{−bc}{2bc}=−\frac{1}{2}$，
又$A\in (0,π)$，$∴A=\frac{2π}{3}$，
$∵a=2\sqrt[ ]{3}$，$b=2$，
$∴$在$△ABC$中，由正弦定理得：
$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}⇔\frac{2\sqrt[ ]{3}}{\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}}=\frac{2}{sinB}⇒sinB=\frac{1}{2}$，
$∵b<a⇔B<A$，$∴B=\frac{π}{6}$；
$(2)∵S\_{△ABC}=\frac{1}{2}bcsin∠BAC=\frac{\sqrt[ ]{3}}{4}bc=\sqrt[ ]{3}⇒bc=4$，
*AD*是$∠BAC=\frac{2π}{3}$的角平分线，
而$S\_{△ABC}=S\_{△ABD}+S\_{△ACD}$，
$∴\frac{1}{2}×AB×AD×sin\frac{π}{3}+\frac{1}{2}×AC×AD×sin\frac{π}{3}=\frac{1}{2}×AB×AC×sin\frac{2π}{3}$，
即$(b+c)AD=bc$，
$∴AD=\frac{bc}{b+c}$，
$∵b>0$，$c>0$，$b+c\geq 2\sqrt[ ]{bc}$，且$bc=4$，当且仅当$b=c$取等，
$∴AD=\frac{bc}{b+c}\leq \frac{bc}{2\sqrt[ ]{bc}}=1$，当且仅当$b=c=2$取等，
$∴AD$最大值为$1.$

18.$($本小题17分$)$
如图，在正三棱台$ABC−A\_{1}B\_{1}C\_{1}$中，底面*ABC*是边长为4的正三角形，且$AA\_{1}=B\_{1}C\_{1}=2.$
$(1)$证明：$AA\_{1}⊥BC$；
$(2)$求异面直线$A\_{1}B$，$B\_{1}C$所成角的余弦值.


【答案】解：$(1)$证明：将正三棱台补成正三棱锥$D−ABC$，要证$AA\_{1}⊥BC$只要证$DA⊥BC$即可．
取*BC*中点*E*，连接*AE*，而底面*ABC*是边长为4的正三角形，则$AB=AC$，则$AE⊥BC$，
连接*CD*，*BD*，则$DE⊥BC$，
$∵AE∩DE=E$，且*AE*，$DE⊂$平面*ADE*，
$∴BC⊥$平面*ADE*，
$∵DA⊂$平面*ADE*，$∴BC⊥AD$，即$AA\_{1}⊥BC.$
$(2)$取$DA\_{1}$中点*F*，则$B\_{1}F$是$△DA\_{1}B$的中位线，
则$FB\_{1}//A\_{1}B$，
则直线$FB\_{1}$与$B\_{1}C$所成的角即是直线$A\_{1}B$，$B\_{1}C$所成的角，
即异面直线所成角即为$∠FB\_{1}C$或其补角，
$∵$底面*ABC*是边长为4的正三角形，$AA\_{1}=B\_{1}C\_{1}=2.$
$∴$三棱锥$D−ABC$的棱长都相等，都为4，
$∴B\_{1}C=2\sqrt[ ]{3}$，$FB\_{1}=\sqrt[ ]{3}$，
$$CF=\sqrt[ ]{AF^{2}+AC^{2}−2AF⋅ACcos60^{∘}}$$

$$=\sqrt[ ]{9+16−2×3×4×\frac{1}{2}}$$

$=\sqrt[ ]{25−12}=\sqrt[ ]{13}$，
由余弦定理可得$cos∠FB\_{1}C=\frac{(\sqrt[ ]{3})^{2}+(2\sqrt[ ]{3})^{2}−(\sqrt[ ]{13})^{2}}{2×\sqrt[ ]{3}×2\sqrt[ ]{3}}=\frac{3+12−13}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，
即异面直线$A\_{1}B$，$B\_{1}C$所成角的余弦值是$\frac{1}{6}.$


19.$($本小题17分$)$
由两角和差公式我们得到倍角公式$cos2θ=2cos^{2}θ−1$，实际上$cos3θ$也可以表示为$cosθ$的三次多项式.
$(1)$试用$cosθ$表示$cos3θ$；
$(2)$求$sin18^{∘}$的值；
$(3)$已知方程$4x^{3}−3x−\frac{1}{2}=0$在$(−1,1)$上有三个根，记为$x\_{1}$，$x\_{2}$，$x\_{3}$，求证：$4x\_{1}^{3}+4x\_{2}^{3}+4x\_{3}^{3}=\frac{3}{2}.$

【答案】解：$(1)$因为$cos3θ=cos(2θ+θ)$
$$=cos2θcosθ−sin2θsinθ$$

$$=(2cos^{2}θ−1)cosθ−2sin^{2}θcosθ$$

$$=2cos^{3}θ−cosθ−2(1−cos^{2}θ)cosθ$$

$$=4cos^{3}θ−3cosθ.$$

$(2)90^{∘}=2×18^{∘}+3×18^{∘}$，所以$cos54^{∘}=sin36^{∘}$，
因为$cos54^{∘}=sin36^{∘}⇔4cos^{3}18^{∘}−3cos18^{∘}=2sin18^{∘}cos18^{∘}$，
因为$cos18^{∘}>0$，$4cos^{2}18^{∘}−3=2sin18^{∘}⇔4(1−sin^{2}18^{∘})−3=2sin18^{∘}$，
即$4sin^{2}18^{∘}+2sin18^{∘}−1=0$，
因为$sin18^{∘}>0$，解得$sin18^{∘}=\frac{\sqrt[ ]{5}−1}{4}(\frac{−\sqrt[ ]{5}−1}{4}$已舍$).$
$(3)$证明：因$x\in (−1,1)$，故可令$x=cosθ(0<θ<π)$，
故由$4x^{3}−3x−\frac{1}{2}=0$可得：$4cos^{3}θ−3cosθ−\frac{1}{2}=0(0<θ<π)(∗)$，
由$(1)$得：$cos3θ=\frac{1}{2}$，
因$0<θ<π$，故$0<3θ<3π$，
故$3θ=\frac{π}{3}$，或$3θ=\frac{5π}{3}$，或$3θ=\frac{7π}{3}$，
即方程$(∗)$的三个根分别为$cos\frac{π}{9},cos\frac{5π}{9},cos\frac{7π}{9}$，
又$4x^{3}−3x−\frac{1}{2}=0$，故$4x^{3}=3x+\frac{1}{2}$，
于是，$4x\_{1}^{3}+4x\_{2}^{3}+4x\_{3}^{3}=3(x\_{1}+x\_{2}+x\_{3})+\frac{3}{2}$
$$=3(cos\frac{π}{9}+cos\frac{5π}{9}+cos\frac{7π}{9})+\frac{3}{2}$$

$$=3cos(\frac{π}{3}−\frac{2π}{9})+3cos(\frac{π}{3}+\frac{2π}{9})+3cos(π−\frac{2π}{9})+\frac{3}{2}$$

$$=3(cos\frac{π}{3}cos\frac{2π}{9}+sin\frac{π}{3}sin\frac{2π}{9})+3(cos\frac{π}{3}cos\frac{2π}{9}−sin\frac{π}{3}sin\frac{2π}{9})−3cos\frac{2π}{9}+\frac{3}{2}$$

$=6×\frac{1}{2}cos\frac{2π}{9}−3cos\frac{2π}{9}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$