

江苏省仪征中学 2023-2024 学年第二学期数学周练 7

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $(1+2i)z=4+3i$ ，则复数 $z=$ ()

- A. $-\frac{2}{5}+i$ B. $-\frac{2}{5}-i$ C. $2+i$ D. $2-i$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $b^2 - c^2 = 2a^2$ ， $c = 2a$ ，则 $\cos B =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知复数 $z = \frac{2-mi}{2+i}$ 为纯虚数，则实数 m 的值为 ()

- A. -1 B. -4 C. 1 D. 4

4. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$ ， $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$ ，那么 $\tan\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)$ 为 ()

- A. $\frac{13}{18}$ B. $\frac{13}{23}$ C. $\frac{7}{23}$ D. $\frac{3}{18}$

5. 下列关于空间几何体结构特征的描述错误的是 ()

- A. 棱柱的侧棱互相平行
B. 以直角三角形的一边为轴旋转一周得到的几何体不一定是圆锥
C. 正三棱锥的各个面都是正三角形
D. 棱台各侧棱所在直线会交于一点

6. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$ ， $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{5}$ ，则 $\log_2(-\tan \alpha \tan \beta) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

7. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ ，且 $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = \sqrt{5}$ ， M 是 BC 的中点， O 是线段 AM 的中点，则 $\overline{OA} \cdot (\overline{OB} + \overline{OC})$ 的值为 ()

- A. 0 B. $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ C. $-\frac{5}{4}$ D. $-\frac{5}{8}$

8. 已知角 α, β 满足： $\sin \alpha + \sin \beta = 5 \sin(\alpha - \beta)$ ，其中 $\alpha - \beta \neq \pi + 2k\pi$ ， $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ ， $\beta \neq \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，

则 $\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} =$ ()

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

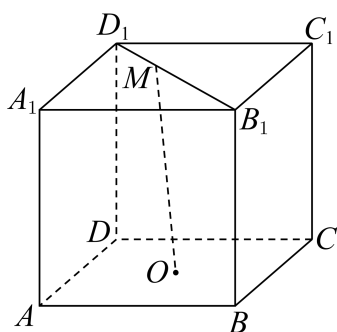
9. 若复数 z 在复平面内对应的点为 Z ，则下列说法正确的是（ ）

- A. 若 $z(i-1) = i^{2023} - 1$ ，则 Z 在第二象限
- B. 若 z 为纯虚数，则 Z 在虚轴上
- C. 若 $|z| \leq 3$ ，则点 Z 的集合所构成的图形的面积为 6π
- D. 若 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ ，且 $a^2 + b^2 = 1$ ，则 $z + \frac{1}{z}$ 为实数

10. 已知向量 $\vec{a} = (m+1, -1)$ ， $\vec{b} = (1-m, 2)$ ，则下列说法正确的是（ ）

- A. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $m = 3$
- B. 存在 $m \in \mathbb{R}$ ，使得 $\vec{a} \perp \vec{b}$
- C. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$
- D. 当 $m = 1$ 时， $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量的坐标为 $(0, -1)$

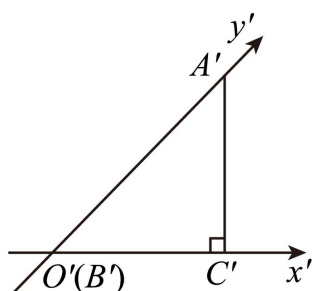
11 如图．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， O 为正方形 $ABCD$ 的中心，当点 M 在线段 B_1D_1 （不包含端点）上运动时，下列直线中一定与直线 OM 异面的是（ ）



- A. CC_1
- B. A_1B
- C. AB_1
- D. DB_1

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 如图，若斜边长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角 $\triangle A'B'C'$ （ B' 与 O' 重合）是水平放置的 $\triangle ABC$ 的直观图，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $C = \frac{\pi}{3}$, $c = \sqrt{3}$, 则 $\frac{3a+b}{3\sin A + \sin B}$ 的值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = a \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 满足: $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上单调, 且

$f(x_1) + f(x_2) = 0$, 则当 $|x_1 + x_2|$ 取得最小值时, $\sin(x_1 + x_2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

15. (本小题 13 分)

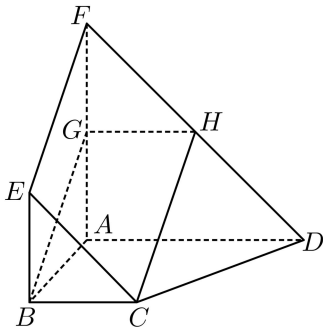
已知复数 z 满足 $z = 3 + (z+1)i$, 其中 i 为虚数单位.

(1) 求 $|\bar{z}|$;

(2) 若 z 是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的一个根, 求实数 p, q 的值.

16. (本小题 15 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 和四边形 $ABEF$ 都是梯形, 且 $BC \parallel AD$, $BE \parallel FA$ 且 $BC = \frac{1}{2}AD$, $BE = \frac{1}{2}FA$, G, H 分别为 FA, FD 的中点.

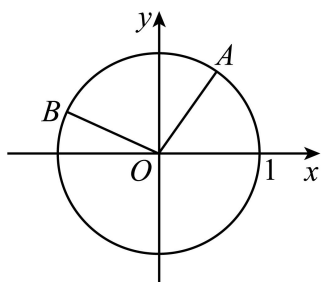


(1) 求证: 四边形 $BCHG$ 是平行四边形.

(2) C, D, F, E 四点是否共面? 为什么?

17. (本小题 15 分)

已知角 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in [0, \pi]$, 角 α 和 β 的终边分别与单位圆交于 A , B 两点.



- (1) 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 求 $\frac{\sin(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \beta) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ 的值;
- (2) 若 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 1$, 点 A 的横坐标为 $\frac{3}{5}$, 求 $\cos\beta - \sin\beta$ 的值.

18. (本小题 17 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且

$$2a \sin A (b^2 + c^2 - a^2) = c \sin B (a^2 + b^2 - c^2) + b \sin C (a^2 + c^2 - b^2).$$

- (1) 求角 A 的大小; (2) 若 $a = 2$, 求 $b + c$ 的取值范围.

19. (本小题 17 分) 已知: ①任何一个复数 $z = a + bi$ 都可以表示成 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的形式. 其中 r 是复数 z 的模, θ 是以 x 轴的非负半轴为始边, 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线 (射线 OZ) 为终边的角, 叫做复数 $z = a + bi$ 的辐角, $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 叫做复数 $z = a + bi$ 的三角形式.

② $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 被称为欧拉公式, 是复数的指数形式.

③ 方程 $x^n = 1$ (n 为正整数) 有 n 个不同的复数根.

(1) 设 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 求 ω^{2024} ;

(2) 试求出所有满足方程 $x^6 = 1$ 的复数 x 的值所组成的集合;

(3) 复数 $z = \cos \frac{\pi}{1012} + i \sin \frac{\pi}{1012}$, 求 $(z-1)(z^2-1)\cdots(z^{2023}-1)$.

周练 7 答案和解析

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $(1+2i)z=4+3i$ ，则复数 $z=$ ()

- A. $-\frac{2}{5}+i$ B. $-\frac{2}{5}-i$ C. $2+i$ D. $2-i$

【答案】D

【解析】【分析】根据复数除法法则即可求解.

【详解】由 $(1+2i)z=4+3i$ 得 $z=\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=2-i$. 故选：D

2. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $b^2-c^2=2a^2$ ， $c=2a$ ，则 $\cos B=$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【解析】【分析】由余弦定理计算可得；

【详解】解：由 $b^2-c^2=2a^2$ ， $c=2a$ 得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{-a^2}{2ac}=\frac{-a}{2c}=-\frac{1}{4}$ ， 故选：B.

3. 已知复数 $z=\frac{2-mi}{2+i}$ 为纯虚数，则实数 m 的值为 ()

- A. -1 B. -4 C. 1 D. 4

【答案】D

【分析】根据复数除法运算可化简 z ，由纯虚数定义可构造方程求得结果.

【详解】由题意得 $z=\frac{2-mi}{2+i}=\frac{(2-mi)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-(2m+2)i-m}{5}=\frac{4-m}{5}-\frac{(2m+2)i}{5}$ 为纯虚数，

所以 $\begin{cases} \frac{4-m}{5}=0 \\ -\frac{2m+2}{5}\neq 0 \end{cases}$ ，解得 $m=4$ ，故 D 正确. 故选：D.

4. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$ ， $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$ ，那么 $\tan\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)$ 为 ()

- A. $\frac{13}{18}$ B. $\frac{13}{23}$ C. $\frac{7}{23}$ D. $\frac{3}{18}$

【答案】C

【解析】【分析】根据 $\tan\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ 利用两角差的正切公式即可得解.

【详解】因为 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$, 所以

$$\tan\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left[(\alpha + \beta) - \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4}} = \frac{7}{23}. \text{ 故选: C.}$$

5. 下列关于空间几何体结构特征的描述错误的是 ()

- A. 棱柱的侧棱互相平行
- B. 以直角三角形的一边为轴旋转一周得到的几何体不一定是圆锥
- C. 正三棱锥的各个面都是正三角形
- D. 棱台各侧棱所在直线会交于一点

【答案】C

【解析】【分析】根据相应几何体的定义和性质判断即可.

【详解】根据棱柱的性质可知 A 正确;

当以直角三角形的斜边所在直线为旋转轴时, 所得几何体为两个圆锥的合体, 故 B 正确;

正三棱锥的底面是正三角形, 其余侧面是全等的等腰三角形, 故 C 错误;

棱台是用平行于底面的平面截棱锥而得, 故侧棱所在直线必交于一点, D 正确. 故选: C

6. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{5}$, 则 $\log_2(-\tan \alpha \tan \beta) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $-\frac{1}{2}$
- C. 2
- D. -2

【答案】D

【分析】根据余弦的和差角公式求得 $\tan \alpha \tan \beta$, 再求结果即可.

【详解】因为 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{5}$,

$$\text{则 } \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}, \quad \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{5},$$

$$\text{解得 } \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{15}, \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{4}{15}, \quad \text{故 } \tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = -\frac{1}{4},$$

$$\text{则 } \log_2(-\tan \alpha \tan \beta) = \log_2 \frac{1}{4} = -2.$$

故选: D.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} \perp \overline{AC}$, 且 $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = \sqrt{5}$, M 是 BC 的中点, O 是线段 AM 的中点, 则 $\overline{OA} \cdot (\overline{OB} + \overline{OC})$ 的值为 ()

- A. 0
- B. $-\frac{\sqrt{5}}{4}$
- C. $-\frac{5}{4}$
- D. $-\frac{5}{8}$

【答案】C

【分析】建系求出各点的坐标, 进而应用数量积的坐标运算即可.

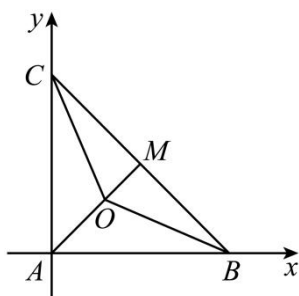
【详解】如图，以 A 为原点， AB ， AC 所在直线分别为 x 轴， y 轴建立直角坐标系，

则 $A(0,0)$ ， $B(\sqrt{5},0)$ ， $C(0,\sqrt{5})$ ，因为 M 是 BC 的中点，所以 $M\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ ，

因为 O 是线段 AM 的中点，所以 $O\left(\frac{\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ ，所以 $\overrightarrow{OB}=\left(\frac{3\sqrt{5}}{4},-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ ， $\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{\sqrt{5}}{4},\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$ ，

$\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{\sqrt{5}}{4},-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ ，所以 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ ，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=-\frac{\sqrt{5}}{4}\times\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\times\frac{\sqrt{5}}{2}=-\frac{5}{4}$ 。

故选：C。



8. 已知角 α, β 满足： $\sin\alpha + \sin\beta = 5\sin(\alpha - \beta)$ ，其中 $\alpha - \beta \neq \pi + 2k\pi$ ， $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ ， $\beta \neq \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，

则 $\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} = (\quad)$

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

【答案】B

【分析】利用和差化积公式和二倍角公式求解即可。

【详解】因为 $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ ，

$\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ ，

所以 $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ，又 $\sin(\alpha - \beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ，

于是由 $\sin\alpha + \sin\beta = 5\sin(\alpha - \beta)$ 可得 $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 5 \times 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ，即

$2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \left(5\sin\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \right) = 0$ ，

所以 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$ 或 $5\sin\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ 。

因为 $\alpha - \beta \neq \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，所以 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$ ，

所以 $5\sin\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ ，即 $5\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ ，

所以 $5\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$, 即 $4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=6\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$,

所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}\tan\frac{\beta}{2}$, 即 $\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{3}{2}$. 故选: B.

二、多选题: 本题共 3 小题, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 若复数 z 在复平面内对应的点为 Z , 则下列说法正确的是 ()

A. 若 $z(i-1)=i^{2023}-1$, 则 Z 在第二象限

B. 若 z 为纯虚数, 则 Z 在虚轴上

C. 若 $|z|\leq 3$, 则点 Z 的集合所构成的图形的面积为 6π

D. 若 $z=a+bi(a, b\in\mathbf{R})$, 且 $a^2+b^2=1$, 则 $z+\frac{1}{z}$ 为实数

【答案】BD

【解析】【分析】根据 i 的周期性、复数的几何意义、复数的除法运算等知识直接判断各个选项.

【详解】对于 A, 因为 $z(i-1)=i^{2023}-1=-i-1$, 故 $z=\frac{-i-1}{i-1}=\frac{i+1}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$, 所以 $Z(0,1)$ 在坐标

轴上, 故 A 错误; 对于 B, 若 z 为纯虚数, 则 Z 在虚轴上, 故 B 正确; 对于 C, 若 $|z|\leq 3$, 则点 Z 的集合

所构成的图形是半径为 3 的圆及其内部, 面积为 $3^2\times\pi=9\pi$, 故 C 错误; 对于 D, $z=a+bi, a^2+b^2=1$,

则 $z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=a+\frac{a}{a^2+b^2}+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i=a+a=2a$ 为实数, 故 D 正确.

故选: BD

10. 已知向量 $\vec{a}=(m+1, -1)$, $\vec{b}=(1-m, 2)$, 则下列说法正确的是 ()

A. 若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 则 $m=3$

B. 存在 $m\in\mathbf{R}$, 使得 $\vec{a}\perp\vec{b}$

C. $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$

D. 当 $m=1$ 时, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量的坐标为 $(0, -1)$

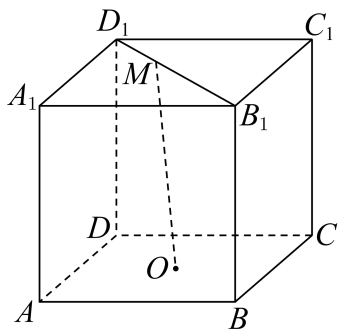
【答案】CD

【解析】【分析】根据平面向量共线的坐标公式即可判断 A; 根据平面线路垂直的坐标表示即可判断 B; 根据向量的模的坐标计算即可判断 C; 根据投影向量的计算公式即可判断 D.

【详解】对于 A, 若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 则 $2(m+1)+1-m=0$, 解得 $m=-3$, 故 A 错误;

对于 B, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 即 $1 - m^2 - 2 = 0$, 方程无解, 所以不存在 $m \in \mathbf{R}$, 使得 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 故 B 错误; 对于 C, $\vec{a} + \vec{b} = (2, 1)$, 所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, 故 C 正确; 对于 D, 当 $m = 1$ 时, $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (0, 2)$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量的坐标为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-2}{2} \times \frac{(0, 2)}{2} = (0, -1)$, 故 D 正确. 故选: CD.

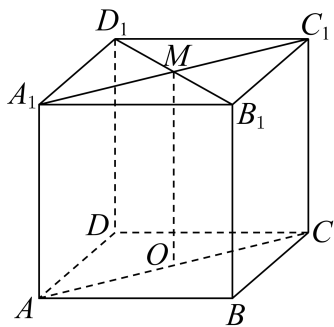
11 如图. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为正方形 $ABCD$ 的中心, 当点 M 在线段 B_1D_1 (不包含端点) 上运动时, 下列直线中一定与直线 OM 异面的是 ()



- A. CC_1 B. A_1B C. AB_1 D. DB_1

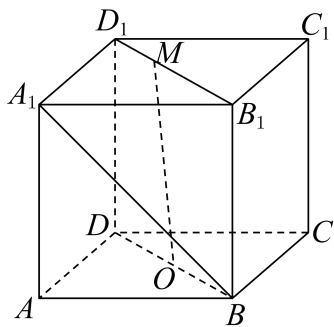
【答案】BC

【详解】A: 当 M 为 B_1D_1 的中点时, $CC_1 \parallel OM$, 故 A 错误;



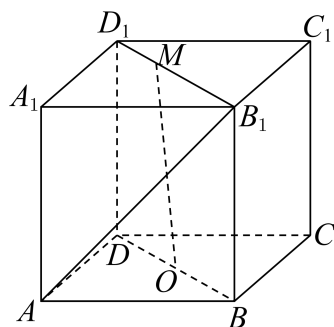
B: 因为 $OM \subset$ 平面 BDD_1B_1 , $B \in$ 平面 BDD_1B_1 , $B \notin OM$, $A_1 \notin$ 平面 BDD_1B_1 ,

所以直线 A_1B 与直线 OM 一定为异面直线, 故 B 正确;

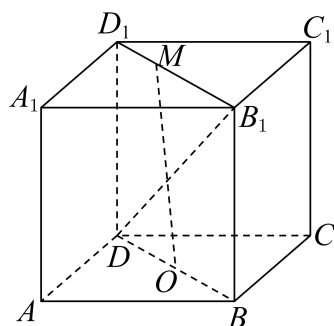


C: 因为 $OM \subset$ 平面 BDD_1B_1 , $B_1 \in$ 平面 BDD_1B_1 , $B_1 \notin OM$, $A \notin$ 平面 BDD_1B_1 ,

所以直线 AB_1 与直线 OM 一定为异面直线，故 C 正确；



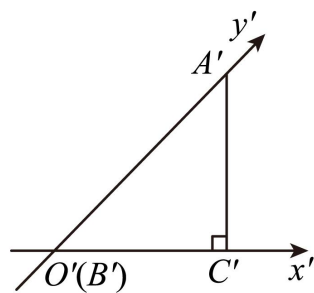
D: 又 $OM \subset \text{平面 } BDD_1B_1$, $DB_1 \subset \text{平面 } BDD_1B_1$, 故 D 错误；



故选：BC.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

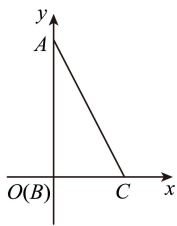
12. 如图，若斜边长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角 $\triangle A'B'C'$ (B' 与 O' 重合) 是水平放置的 $\triangle ABC$ 的直观图，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 【分析】 根据给定的直观图作出原图，再计算面积作答.

【详解】 在直观图中， $\triangle A'B'C'$ 为等腰直角三角形，斜边 $A'B' = \sqrt{2}$ ，得 $A'C' = 1$ ， $B'C' = 1$ ，
则原图形如图，有 $AB \perp BC$ ， $AB = 2A'B' = 2\sqrt{2}$ ， $BC = B'C' = 1$ ，



所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$. 故答案为: $\sqrt{2}$

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $C = \frac{\pi}{3}$, $c = \sqrt{3}$, 则 $\frac{3a+b}{3\sin A + \sin B}$ 的值为_____.

【答案】2

【解析】【分析】根据正弦定理边角互化, 计算求值.

【详解】根据正弦定理可知 $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, 所以 $\frac{3a+b}{3\sin A + \sin B} = \frac{2R(3\sin A + \sin B)}{3\sin A + \sin B} = 2R$,

而 $\frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 = 2R$, 所以 $\frac{3a+b}{3\sin A + \sin B} = 2$. 故答案为: 2

14. 已知函数 $f(x) = a \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 满足: $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上单调, 且 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 则当 $|x_1 + x_2|$ 取得最小值时, $\sin(x_1 + x_2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】利用辅助角公式化简函数式, 三角函数的图象与性质先计算得 a , 再计算 $|x_1 + x_2|$ 何时取最小值即可得结果.

【详解】易知 $a \neq 0$, 若 $a > 0$, 由辅助角公式得 $f(x) = a \sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{a^2 + 3} \sin(x + \varphi)$,

其中 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{a}$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 因为 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$,

则 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow a = 1$, 所以 $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,

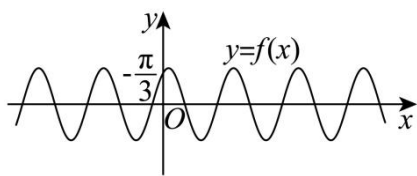
若 $a < 0$, 则 $f(x) = -(-a \sin x - \sqrt{3} \cos x) = -\sqrt{a^2 + 3} \sin(x - \varphi)$,

其中 $\tan(-\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{-a}$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 同上 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, 与前提矛盾, 舍去,

故 $f(x) = 1 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 易知 $y = f(x)$ 以 $\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ 为对称中心,

根据题意函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上单调, 且 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 则 $x_1 + x_2 = 2 \times \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

则当 $|x_1 + x_2|$ 取得最小值时, $\sin(x_1 + x_2) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故答案为: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



【点睛】难点点睛：现根据 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 确定 a 的值，得出 $f(x)$ 解析式，利用三角函数的单调性、对称性计算即可.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (本小题 13 分)

已知复数 z 满足 $z = 3 + (z+1)i$ ，其中 i 为虚数单位.

(1) 求 $|\bar{z}|$;

(2) 若 z 是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的一个根，求实数 p, q 的值.

【答案】(1) $\sqrt{5}$ (2) $p = 2, q = 5$

【解析】【分析】(1) 计算 $z = \frac{3+i}{1-i} = 1+2i$ ，确定 $\bar{z} = 1-2i$ ，再计算模长得到答案.

(2) 将 $z = 1+2i$ 代入方程得到 $\begin{cases} q-p-3=0 \\ 4-2p=0 \end{cases}$ ，解得答案.

【小问 1 详解】 $z = 3 + (z+1)i$ ，故 $z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+2i$ ，

故 $\bar{z} = 1-2i$ ，即 $|\bar{z}| = \sqrt{5}$.

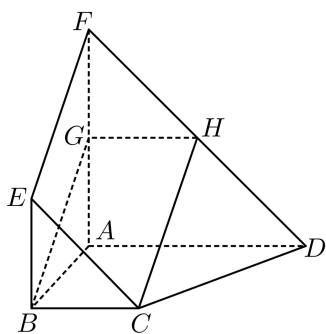
【小问 2 详解】 $z = 1+2i$ 是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的一个根，所以 $(1+2i)^2 - p(1+2i) + q = 0$ ，

所以 $(q-p-3) + (4-2p)i = 0$ ，所以 $\begin{cases} q-p-3=0 \\ 4-2p=0 \end{cases}$ ，

解得 $p = 2, q = 5$.

17. (本小题 15 分). 如图，四边形 $ABCD$ 和四边形 $ABEF$ 都是梯形，且 $BC \parallel AD$ ， $BE \parallel FA$ 且 $BC = \frac{1}{2}AD$ ，

$BE = \frac{1}{2}FA$ ， G, H 分别为 FA, FD 的中点.



(1)求证：四边形 $BCHG$ 是平行四边形.

(2) C, D, F, E 四点是否共面？为什么？

【答案】(1)证明见解析

(2) C, D, F, E 四点共面，理由见解析

【详解】(1) $\because G, H$ 分别为 FA, FD 的中点， $\therefore GH \parallel AD$ ， $GH = \frac{1}{2}AD$ ，

又 $BC \parallel AD$ ， $BC = \frac{1}{2}AD$ ， $\therefore GH \parallel BC$ ， $GH = BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCHG$ 是平行四边形.

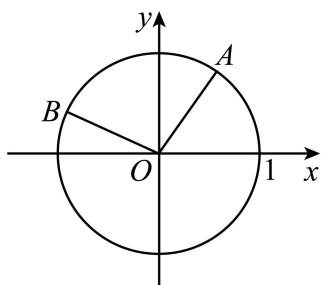
(2) $\because BE \parallel FA$ ， $BE = \frac{1}{2}FA$ ， G 为 FA 中点， $\therefore BE \parallel FG$ ， $BE = FG$ ， $\therefore$ 四边形 $BEFG$ 为平行四边形， $\therefore EF \parallel BG$ ，

$EF = BG$ ，

由 (1) 知： $CH \parallel BG$ ， $CH = BG$ ， $\therefore CH \parallel EF$ ， $CH = EF$ ，

$\therefore$ 四边形 $CEFH$ 为平行四边形， $\therefore CE \parallel FH$ ，即 $CE \parallel FD$ ， $\therefore C, D, E, F$ 四点共面.

17. (本小题 15 分). 已知角 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\beta \in [0, \pi]$ ，角 α 和 β 的终边分别与单位圆交于 A ， B 两点.



(1) 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ ，求 $\frac{\sin(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \beta) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ 的值；

(2) 若 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 1$ ，点 A 的横坐标为 $\frac{3}{5}$ ，求 $\cos\beta - \sin\beta$ 的值.

【答案】(1) 1 (2) $\cos\beta - \sin\beta = \frac{1-7\sqrt{3}}{10}$

【解析】【分析】(1) 由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ ，得 $OA \perp OB$ ，再结合 α, β 的范围可得 $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ，然后代入式子利用诱导公式化简即可；

(2) 对 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 1$ 化简可得 $\beta = \alpha + \frac{2\pi}{3}$ ，由点 A 的横坐标为 $\frac{3}{5}$ ，结合任意角的三角函数定义可求出 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的值，再利用两角和与差的正余弦公式可求出 $\sin \beta, \cos \beta$ ，从而可求出 $\cos \beta - \sin \beta$ 的值。

【小问 1 详解】由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ ，得 $OA \perp OB$ ，又 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\beta \in [0, \pi]$ ，所以 $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ，

$$\text{所以 } \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \beta) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\sin \alpha (-\sin \beta)}{-\cos \alpha (-\cos \beta)} = -\frac{\sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha (-\sin \alpha)} = 1,$$

【小问 2 详解】由 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 1$ ，得 $1 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 1 = 1$ ， $\cos \angle AOB = -\frac{1}{2}$ ，

又 $\angle AOB \in [0, \pi]$ ，所以 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ ，则 $\beta = \alpha + \frac{2\pi}{3}$ 因为点 A 的横坐标为 $\frac{3}{5}$ ，

所以 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{2\pi}{3}$

$$= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3+4\sqrt{3}}{10} \quad \sin \beta = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-4+3\sqrt{3}}{10} \text{ 所以 } \cos \beta - \sin \beta = \frac{1-7\sqrt{3}}{10}$$

18. (本小题 17 分). 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且

$$2a \sin A (b^2 + c^2 - a^2) = c \sin B (a^2 + b^2 - c^2) + b \sin C (a^2 + c^2 - b^2).$$

(1) 求角 A 的大小；(2) 若 $a = 2$ ，求 $b + c$ 的取值范围。

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $(2\sqrt{3}, 4]$

【解析】【分析】(1) 利用余弦定理以及两角和的正弦公式求解；

(2) 利用正弦定理将边化角，用三角函数求取值范围。

【小问 1 详解】 $2a \sin A (b^2 + c^2 - a^2) = c \sin B (a^2 + b^2 - c^2) + b \sin C (a^2 + c^2 - b^2)$ ，

由余弦定理可得 $2a \sin A \times 2b \cos A = c \sin B \times 2a \cos C + b \sin C \times 2a \cos B$ ，

整理得 $2 \sin A \cos A = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin(B + C)$ ，

$$\therefore 2\sin A \cos A = \sin(B+C) = \sin(\pi-A) = \sin A,$$

$$\because A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \sin A \neq 0, \therefore \cos A = \frac{1}{2}, \therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

【小问 2 详解】由正弦定理可知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\frac{a}{2\sin A} = \frac{2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \therefore b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B, c = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin C,$$

$$\therefore b+c = \frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin B + \sin C) = \frac{4\sqrt{3}}{3}[\sin B + \sin(A+B)] = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\sin B + 2\cos B = 4\left(\sin B \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos B\right) = 4\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\because \triangle ABC \text{ 为锐角三角形}, \therefore \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < C < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \therefore \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}, \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1, \therefore 2\sqrt{3} < b+c \leq 4,$$

即 $b+c$ 的取值范围为 $(2\sqrt{3}, 4]$.

19. (本小题 17 分) 已知: ①任何一个复数 $z = a+bi$ 都可以表示成 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 的形式. 其中 r 是复数 z 的模, θ 是以 x 轴的非负半轴为始边, 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线 (射线 OZ) 为终边的角, 叫做复数 $z = a+bi$ 的辐角, $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 叫做复数 $z = a+bi$ 的三角形式.

② $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 被称为欧拉公式, 是复数的指数形式.

③方程 $x^n = 1$ (n 为正整数) 有 n 个不同的复数根.

(1) 设 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 求 ω^{2024} ;

(2) 试求出所有满足方程 $x^6 = 1$ 的复数 x 的值所组成的集合;

(3) 复数 $z = \cos \frac{\pi}{1012} + i \sin \frac{\pi}{1012}$, 求 $(z-1)(z^2-1)\cdots(z^{2023}-1)$.

【答案】(1) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

(2) $\left\{1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$;

(3) -2024 .

【分析】(1) 根据给定的定义, 转化为复数的三角形式求解即得.

(2) 设 $x = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ ，利用指数运算，结合定义求得 $\cos 6\theta = 1$ ，进而求出 θ 得解.

(3) 利用给定的定义求出方程 $x^{2024} - 1 = 0$ 根的形式，再借助方程根的意义列出等式，赋值计算即得.

【详解】(1) 依题意， $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ，

所以

$$\omega^{2024} = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^{2024} = e^{i\frac{4048\pi}{3}} = \cos \frac{4048\pi}{3} + i \sin \frac{4048\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \dots\dots\dots 4$$

分

(2) 设 $x = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ ，则 $x^6 = (\cos \theta + i \sin \theta)^6 = (e^{i\theta})^6 = e^{i6\theta} = \cos 6\theta + i \sin 6\theta = 1$ ，

因此 $\sin 6\theta = 0, \cos 6\theta = 1$ ， $6\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $\theta = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ，

由终边相同的角的意义，取 $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ，则对应的 θ 依次为 $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ ，

因此对应的 x 依次为 $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，

所以所求的集合是 $\left\{1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\} \dots\dots\dots 10$

(3) 当 $z = \cos \frac{\pi}{1012} + i \sin \frac{\pi}{1012}$ 时， $z^n = (\cos \frac{\pi}{1012} + i \sin \frac{\pi}{1012})^n = (e^{i\frac{\pi}{1012}})^n = e^{i\frac{n\pi}{1012}}$ ， $n \in \mathbb{Z}$ ，

则 $(z^n)^{2024} = (e^{i\frac{n\pi}{1012}})^{2024} = e^{i2n\pi} = 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 2023$ ，

因此关于 x 的方程 $x^{2024} - 1 = 0$ 的根为 $1, z, z^2, z^3, \dots, z^{2023}$ ，

则 $x^{2024} - 1 = (x-1)(x-z)(x-z^2)\dots(x-z^{2023})$ ，

又 $x^2 - 1 = (x-1)(1+x), x^3 - 1 = (x-1)(1+x+x^2), x^4 - 1 = (x-1)(1+x+x^2+x^3) \dots$ ，

由此可得 $x^{2024} - 1 = (x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{2023})$ ，

则 $(x-z)(x-z^2)\dots(x-z^{2023}) = 1+x+x^2+\dots+x^{2023}$ ，

令 $x=1$ ，得 $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\dots(1-z^{2023}) = 1+1+1^2+\dots+1^{2023} = 2024$ ，而 2023 为奇数，

所以 $(z-1)(z^2-1)(z^3-1)\dots(z^{2023}-1) = -2024 \dots\dots\dots 17$