**2023~2024学年度第二学期高一数学周末练习9**

一、单选题：本题共**4**小题，每小题**5**分，共**20**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.若复数$z=(m−1)−(m+2)i(m\in R)$为纯虚数，则复数$z$的共轭复数为(    )

A. $−3i$ B. $3i$ C. $4i$ D. $−4i$

2.若向量$\vec{a}=(\sqrt[ ]{3},1)$，$\vec{b}=(1,\sqrt[ ]{3})$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为
．(    )

A. $\frac{π}{3}$ B. $\frac{π}{4}$ C. $\frac{π}{6}$ D. $\frac{π}{12}$

3.已知$α\in \left(0,\frac{π}{2}\right)$，$cosα=\frac{3}{5}$，则$sin(α−\frac{π}{3})$等于  
(    )

A. $\frac{4−3\sqrt[ ]{3}}{10}$ B. $\frac{3\sqrt[ ]{3}−4}{10}$ C. $\frac{4\sqrt[ ]{3}−3}{10}$ D. $\frac{4+3\sqrt[ ]{3}}{10}$

4.如图，在圆柱$O\_{1}O\_{2}$内有一个球$O$，该球与圆柱的上、下底面及母线均相切$.$若$O\_{1}O\_{2}=2$，则圆柱$O\_{1}O\_{2}$的表面积为(    )


A. $4π$ B. $5π$ C. $6π$ D. $π$

二、多选题：本题共**2**小题，共**12**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

5.下列说法正确的是(    )

A. 已知$\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，则“$\vec{a}⋅\vec{b}>0$”是“$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角”的必要不充分条件
B. 用一个平面截圆锥，必得到一个圆锥和一个圆台
C. 若两个平面互相垂直，则过其中一个平面内任意一点作交线的垂线，则此垂线必垂直于另一个平面
D. 在$△ABC$中，$A>B$是$sinA>sinB$的充要条件

6.等腰直角三角形直角边长为$1$，现将该三角形绕其某一边旋转一周，则所形成的几何体的表面积可以为
(    )

A. $\sqrt[ ]{2}π$ B. $(1+\sqrt[ ]{2})π$ C. $2\sqrt[ ]{2}π$ D. $(2+\sqrt[ ]{2})π$

三、填空题：本题共**2**小题，每小题**5**分，共**10**分。

7.设点$A(1,3)$，$B(−3,n)$，$C(m+2,−1).$若$\vec{AB}=−2\vec{BC}$，则$mn$的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

8.把一个半径为$R$的实心铁球铸成三个小球$($不计损耗$)$，三个小球的体积之比为$1:3:4$，其中最小球的半径为          ．

四、解答题：本题共**4**小题，共58分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

9.$($本小题$13$分$)$

铁路路基是用碎石铺设的，其横断面为等腰梯形$($如图$).$已知南京到上海的铁路长约$300km$，试估计所用碎石的方数$($精确到$1m^{3}).$



10.$($本小题$15$分$)$

已知$f(x)=2cos^{2}x+\sqrt[ ]{3}sin 2x+a(a\in R,a$为常数$)$．

$(1)$若$x\in R$，求$f(x)$的最小正周期；

$(2)$若$f(x)$在$[−\frac{π}{6},\frac{π}{4}]$上最大值与最小值之和为$3$，求$a$的值．

11.$($本小题$15$分$)$
在$△ABC$中，已知$AB=2$，$AC=5$，$∠BAC=60°$，$BC$，$AC$边上的两条中线$AM$，$BN$相交于点$P$．


$(1)$求$BC$；

$(2)$求$cos∠MPN$的值．

12.$($本小题$15$分$)$
如图，$△ABC$中，$∠ACB=90°$，$∠ABC=30°$，$BC=\sqrt[ ]{5}$，在三角形内挖去一个半圆$($圆心$O$在边$BC$上，半圆与$AC$、$AB$分别相切于点$C$，$M$，与$BC$交于点$N)$，将$△ABC$绕直线$BC$旋转一周得到一个旋转体．
$(1)$求该几何体中间一个空心球的表面积的大小；
$(2)$求图中阴影部分绕直线$BC$旋转一周所得旋转体的体积．

|  |
| --- |
|  |

**周练9答案和解析**

1.【答案】$B$ 解：$∵$复数$z=(m−1)−(m+2)i(m\in R)$为纯虚数，
$∴m−1=0$且$m+2\ne 0$，$∴m=1$，$∴z=−3i$，$∴$复数$z$的共轭复数为$3i$，
2.【答案】$C$ 解：向量$\vec{a}=(\sqrt[ ]{3},1)$，$\vec{b}=(1,\sqrt[ ]{3})$所以$\vec{a}⋅\vec{b}=\sqrt[ ]{3}+\sqrt[ ]{3}=2\sqrt[ ]{3}$，

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=2$，因此$ ​\_{cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}⋅\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=}\frac{2\sqrt[ ]{3}}{2×2}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，$∵0⩽<\overset{\to }{a},\overset{\to }{b}>⩽π$，$∴<\vec{a}$，$\vec{b}>=\frac{π}{6}$．

3.【答案】$A$ 解：$∵α\in \left(0,\frac{π}{2}\right)$，$cosα=\frac{3}{5}$，$∴sinα=\sqrt[ ]{1−\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$，
所以$sin(α−\frac{π}{3})=sinαcos\frac{π}{3}−cosαsin\frac{π}{3}=\frac{4}{5}×\frac{1}{2}−\frac{3}{5}×\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}=\frac{4−3\sqrt[ ]{3}}{10}$．
4.【答案】$C$ 解：由题设得圆柱底面半径$1$，高为$2$，圆柱$O\_{1}O\_{2}$的表面积为$S=2π×2+2π×1^{2}=6π$．
5.【答案】$AD$ 解：对于$A$：当$\vec{a}⋅\vec{b}>0$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角，也可能为零角，故充分性不成立，
当$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角时，$\vec{a}⋅\vec{b}>0$一定成立，故必要性成立，故*A*正确；
对于$B$：用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，才能得到一个圆锥和一个圆台，
不用平行于圆锥底面的平面截圆锥，则不可能得到一个圆锥和一个圆台，故*B*不正确；
对于$C$：若点在相交线上时，可能推不出线面垂直，故*C*错误；
对于$D$：在$△ABC$中，$A>B⇔a>b⇔sinA>sinB$，所以$A>B$是$sinA>sinB$的充要条件，故*D*正确．
6.【答案】$AB$ 解：如果是绕直角边旋转，形成圆锥，圆锥底面半径为$1$，高为$1$，
母线就是直角三角形的斜边$\sqrt[ ]{2}$，
所以所形成的几何体的表面积是$S=πrl+πr^{2}=π×1×\sqrt[ ]{2}+π×1^{2}=(\sqrt[ ]{2}+1)π$．
如果绕斜边旋转，形成的是上下两个圆锥，圆锥的半径是直角三角形斜边的高$\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}$，
两个圆锥的母线都是直角三角形的直角边，母线长是$1$，
所以形成的几何体的表面积$S=2×πrl=2×π×\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}×1=\sqrt[ ]{2}π$．
综上可知形成几何体的表面积是$(\sqrt[ ]{2}+1)π$或$\sqrt[ ]{2}π$
7.【答案】$15$ 解：因为$\vec{AB}=−2\vec{BC}$，所以$(−4,n−3)=−2(m+5,−1−n)$，则$\left\{\begin{matrix}−2(m+5)=−4\\−2(−1−n)=n−3\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}m=−3\\n=−5\end{matrix}\right.$，所以$mn=15$．
8.【答案】$\frac{1}{2}R$ 解：原球的体积为：$\frac{4π}{3}R^{3}$，
把一个半径为$R$的实心铁球铸成三个小球$($不计损耗$)$，三个小球的体积之比为$1$：$3$：$4$，
最小球的体积为：$\frac{1}{8}×\frac{4π}{3}R^{3}$，设小球的半径为$r$，可得$\frac{4π}{3}r^{3}=\frac{1}{8}×\frac{4π}{3}R^{3}$，所以$r=\frac{1}{2}R.$
9.【答案】解：依题意，路基横断面等腰梯形的面积$S=\frac{1}{2}×(2+3.5)×0.3=0.825(m^{2})$，
而铁路路基可视为横断面为等腰梯形，铁路长$ℎ$为高的棱柱，又$ℎ=3×10^{5}m$，
其体积为$V=Sℎ=0.825×3×10^{5}=247500(m^{3})$，所以估计所用碎石的方数为$247500m^{3}$．

10.【答案】解：$(1)f(x)=2cos^{2}x+\sqrt[ ]{3}sin 2x+a=\sqrt[ ]{3}sin 2x+cos 2x+1+a=2sin (2x+\frac{π}{6})+1+a$．
$∴f(x)$的最小正周期$T=\frac{2π}{\left|ω\right|}=\frac{2π}{2}=π$；
$(2)∵x\in [−\frac{π}{6},\frac{π}{4}]$，$∴2x+\frac{π}{6}\in [−\frac{π}{6},\frac{2π}{3}]$，当$2x+\frac{π}{6}=−\frac{π}{6}$时，即$x=−\frac{π}{6}$，

$f(x)$取得最小值为$2sin (−\frac{π}{6})+1+a=a$，当$2x+\frac{π}{6}=\frac{π}{2}$时，即$x=\frac{π}{6}$，
$f(x)$取得最大值为$2sin \frac{π}{2}+1+a=a+3$，$∵$最大值与最小值之和为$3$，
$∴a+a+3=3$，$∴a=0$，故$a$的值为$0$．

11.【答案】解：$(1)$连接$OM$，则$OM⊥AB$，
设$OM=r$，$OB=\sqrt[ ]{5}−r$，在$△BMO$中，$sin∠ABC=\frac{r}{\sqrt[ ]{5}−r}=\frac{1}{2}$，$∴r=\frac{\sqrt[ ]{5}}{3}$，
$∴$几何体中间一个空心球的表面积的大小为$S=4πr^{2}=\frac{20}{9}π$．
$(2)∵∠ACB=90°$，$∠ABC=30°$，$BC=\sqrt[ ]{5}$，$∴AC=\frac{\sqrt[ ]{15}}{3}$，
$∴$图中阴影部分绕直线$BC$旋转一周所得旋转体的体积为：
$V=V\_{圆锥}−V\_{球}=\frac{1}{3}π×AC^{2}×BC−\frac{4}{3}πr^{3}=\frac{1}{3}π×\frac{5\sqrt[ ]{5}}{3}−\frac{4}{3}π×\frac{5\sqrt[ ]{5}}{27}=\frac{25\sqrt[ ]{5}}{81}π$．

12.【答案】 解：$(1)$因为$AB=2$，$AC=5$，$∠BAC=60°$，
所以由余弦定理得$BC^{2}=AB^{2}+AC^{2}−2AB⋅AC⋅cos ∠BAC=19$，$∴BC=\sqrt[ ]{19}$；
$(2)$ $\vec{AM}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$，$|\vec{AM}|^{2}=\frac{1}{4}(\vec{AB}+\vec{AC})^{2}=\frac{1}{4}(4+25+10)=\frac{39}{4}$，
$\vec{BN}=\frac{1}{2}\vec{AC}−\vec{AB}$，$|\overset{\to }{BN}|^{2}=(\frac{1}{2}\overset{\to }{AC}−\overset{\to }{AB})^{2}=\frac{25}{4}+4−5=\frac{21}{4}$，
则$\vec{AM}·\vec{BN}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})·(\frac{1}{2}\vec{AC}−\vec{AB})=−\frac{1}{2}\vec{AB}^{2}+\frac{1}{4}\vec{AC}^{2}−\frac{1}{4}\vec{AB}·\vec{AC}=−2+\frac{25}{4}−\frac{1}{4}×2×5×\frac{1}{2}=3$，
$∴cos∠MPN=\frac{\overset{\to }{AM}⋅\overset{\to }{BN}}{|\overset{\to }{AM}|⋅\overset{\to }{|BN|}}=\frac{3}{\sqrt[ ]{\frac{39}{4}}×\sqrt[ ]{\frac{21}{4}}}=\frac{4\sqrt[ ]{91}}{91}$．