**2023-2024学年度第二学期高一数学期中复习卷4**

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.函数$f(x)=log\_{2}x−sinx+\frac{1}{2}$的零点所在的区间为(    )

A. $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2},1)$ C. $(1,2)$ D. $(2,3)$

2.在等腰三角形$ABC$中，$AB=AC=\sqrt[ ]{5}$，$BC=2$，若$P$为边$BC$上的动点，则$\vec{AP}⋅(\vec{AB}+\vec{AC})=$(    )

A. $2$ B. $4$ C. $8$ D. $0$

3.已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\left|\vec{a}\right|=2\left|\vec{b}\right|$，且$\vec{b}⊥\left(\vec{a}−\vec{b}\right)$，则向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角大小为(    )

A. $\frac{π}{6}$ B. $\frac{π}{3}$ C. $\frac{π}{2}$ D. $\frac{2π}{3}$

4.在$△ABC$中，角$A$、$B$、$C$所对的边分别为$a$、$b$、$c$，且$b^{2}+c^{2}=a^{2}+bc.$若$sinB·sinC=sin^{2}A$，则$△ABC$的形状是(    )

A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形

5.如图，在平面四边形$ABCD$中，$AB⊥AD$，$∠ABC=\frac{3π}{4}$，$∠ADC=\frac{π}{6}$，$AB=1$，$CD=4$，则$tan∠CAD=$(    )

A. $1$ B. $3$ C. $2$ D. $4$

1. 已知函数$f(x)=\left\{\begin{matrix}|2^{x}−1|,x⩽1\\(x−2)^{2},x>1\end{matrix}\right.$，函数$y=f\left(x\right)−a$有四个不同的的零点$x\_{1}$，$x\_{2}$，$x\_{3}$，$x\_{4}$，

且$x\_{1}<x\_{2}<x\_{3}<x\_{4}$，则(    )

A. $a$的取值范围是$(0,\frac{1}{2})$ B. $x\_{2}−x\_{1}$的取值范围是$(0,1)$
C. $x\_{3}+x\_{4}=2$ D. $\frac{2^{x\_{1}}+2^{x\_{2}}}{x\_{3}+x\_{4}}=\frac{1}{2}$

7.已知关于$x$的方程$2kx^{2}−2x−5k−1=0$的两个实数根一个小于$1$，另一个大于$1$，则实数$k$的取值范围是(    )

A. $\left(0,+\infty \right)$ B. $\left(−1,0\right)$
C. $\left(−\infty ,−1\right)$ D. $\left(−\infty ,−1\right)∪\left(0,+\infty \right)$

8.如图，扇形$AOB$中，点$C$是$\overparen{AB}$上一点，且$∠AOB=\frac{3π}{4}.$若$\vec{OC}=x\vec{OA}+y\vec{OB}$，则$x+\sqrt[ ]{2}y$的最大值为(    )

A. $\sqrt[ ]{10}$ B. $\sqrt[ ]{3 }$ C. $\sqrt[ ]{2}$ D. $1$

二、多选题：本题共**4**小题，共**20**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9.已知复数$z$，其共轭复数为$\overline{z}$，下列结论正确的是(    )

A. $z⋅\overline{z}=|z|^{2}$ B. $z^{2}=|\overline{z}|^{2}$
C. $z+\overline{z}=0$ D. $|z|+|\overline{z}|\geq |z+\overline{z}|$

10.下列各式中，值为$\frac{1}{2}$的有(    )

A. $\frac{1}{sin 50^{∘}}+\frac{\sqrt[ ]{3}}{cos50^{∘}}$ B. $sin7^{∘}cos23^{∘}+sin83^{∘}cos67^{∘}$
C. $\frac{tan22.5^{∘}}{1−tan^{2}22.5^{∘}}$ D. $\frac{1}{(1+tan22^{∘})(1+tan23^{∘})}$

11.向量是近代数学中重要和基本的概念之一，它既是代数研究对象，也是几何研究对象，是沟通代数与几何的桥梁$.$若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\left|=\right|\vec{b}\right|=2$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\sqrt[ ]{3}$，则(    )

A. $\vec{a}⋅\vec{b}=−2$ B. $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{π}{3}$
C. $\left|\vec{a}−\vec{b}\right|<\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ D. $\vec{a}−\vec{b}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\frac{1}{2}\vec{b}$

12.在$△ABC$中，内角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，且$c=\sqrt[ ]{2}$，则下列选项正确的是(    )

A. 若$B=\frac{π}{4},1<b<\sqrt[ ]{2}$，则$△ABC$有两解
B. 若$B\in (\frac{π}{2},π),b>\sqrt[ ]{2}$，则$△ABC$无解
C. 若$△ABC$为锐角三角形，且$B=2C$，则$sinA\in (\frac{\sqrt[ ]{2}}{4}a,\frac{1}{2}a)$
D. 若$A+B=2C$，则$a+b$的最大值为$2\sqrt[ ]{2}$

三、填空题：本题共**4**小题，每小题**5**分，共**20**分。

13.设$i$是虚数单位，若复数$z=2m^{2}−m−6+(m−2)i$是纯虚数，则实数$m=$           ．

14.在$△ABC$中，$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，$B=\frac{π}{3}$，$\vec{AB}⋅\vec{BC}=−2$，且满足$sin A+sin C=2sin B$，则该三角形的外接圆的半径$R$为          ．

15.已知$A(3,0)$，$B(0,3)$，$C(cosα,sinα)$，若$\vec{AC}⋅\vec{BC}=−1$，则$sin(α+\frac{π}{4})=$          ．

16.在锐角$ΔABC$中，角$A,B,C$所对的边为$a,b,c$，若$cosA+cos B(cos C−\sqrt[ ]{3}sin C)=0.$且$b=1$，则$a+c$的取值范围为          ．

四、解答题：本题共**6**小题，共**72**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.$($本小题$12$分$)$已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$θ=\frac{3π}{4}$，且$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2\sqrt[ ]{2}$．
$(1)$若$k\overline{a}+2\vec{b}$与$3\vec{a}+4\vec{b}$共线，求实数$k;(2)$求$\vec{a}·\vec{b}$，$|\vec{a}+\vec{b}|;(3)$求$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角的余弦值．

18.$($本小题$12$分$)$设复数$z=\left(m^{2}−4m−5\right)+\left(m^{2}+5m+4\right)i$，$m$为实数．

$(1)$当$m$为何值时，$z$是纯虚数$;(2)$若$m=−2$ ，求$|z|$的值$;$

$(3)$若复数$\overline{z}$在复平面内对应的点在第三象限，求实数$m$的取值范围．

1. $($本小题$12$分$)$

在$△ABC$中，内角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，$2S=\sqrt[ ]{3}\vec{AB}⋅\vec{CB}($其中$S$为$△ABC$的面积$)$．

$(1)$求$B$；$(2)$若$△ABC$为锐角三角形，求$\frac{a+c}{b}$的取值范围．

20.$($本小题$12$分$)$

在$ΔABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，设$ΔABC$的面积为$S$，$a^{2}sinC=accosBsinC+S$．

$(1)$求$C$；$(2)$若$bsinC+csinB=6sinB$，求$ΔABC$周长的最大值．

21.$($本小题$12$分$)$如图，在直角梯形$OABC$中，$OA//CB,OA⊥OC,OA=2BC=2OC,M$为$AB$上靠近$B$的三等分点，$OM$交$AC$于$D,P$为线段$BC$上的一个动点．



$(1)$用$\vec{OA}$和$\vec{OC}$表示$\vec{OM}$；$(2)$求$\frac{OD}{DM}$；$(3)$设$\vec{OB}=λ\vec{CA}+μ\vec{OP}$，求$λ⋅μ$的取值范围．

22.$($本小题$12$分$)$

已知函数$f(x)=2sin(\frac{π}{2}−x)sin(\frac{π}{2}+x)−1+2\sqrt[ ]{3}sinxcosx.$

$(1)$求函数$f(x)$的单调递减区间$;$

$(2)$求函数$f(x)$在区间$[0,\frac{π}{2}]$的最大值和最小值$;$

$(3)$若$g(x)=f(x)−\frac{6}{5}$在区间$[0,\frac{π}{2}]$上恰有两个零点$x\_{1}$，$x\_{2}(x\_{1}<x\_{2})$，求$sin(x\_{1}−x\_{2})$的值．

**答案和解析**

1.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查零点存在定理，涉及对数函数，三角函数性质，属于中档题．

【解答】

解：利用$f(a)⋅f(b)<0$；
因为$f(\frac{1}{2})=−1−sin\frac{1}{2}+\frac{1}{2}<0$，$f(1)=−sin1+\frac{1}{2}<0$，$f(2)=1−sin2+\frac{1}{2}>0$，所以$f(1)⋅f(2)<0$，

选*C*．

2.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题主要考查平面向量的数量积、平面向量的加法运算以及两向量垂直，属于基础题．
解题的关键设$AD$是等腰三角形$ABC$的高，利用勾股定理求出$AD$的长，且 $\vec{AP}⋅(\vec{AB}+\vec{AC})=(\vec{AD}+\vec{DP})⋅2\vec{AD}=2\vec{AD}^{2}+2\vec{DP}⋅\vec{AD}=2\vec{AD}^{2}$．

【解答】
解：设$AD$是等腰三角形$ABC$的高，则$AD=\sqrt[ ]{5−1}=2$，
故$\vec{AP}⋅(\vec{AB}+\vec{AC})=(\vec{AD}+\vec{DP})⋅2\vec{AD}=2\vec{AD}^{2}+2\vec{DP}⋅\vec{AD}=2\vec{AD}^{2}=8$．
故答案选：$C$．

3.【答案】$B$

【解析】【分析】

本题考查利用向量的数量积求向量的夹角，向量的数量积与向量的垂直关系，属于中档题．
根据向量垂直时其数量积为$0$，可得 $\vec{a}⋅\vec{b}=|\vec{b}|^{2}$ ，然后由向量夹角公式可得答案．

【解答】

解：$∵$ $\vec{b}⊥\left(\vec{a}−\vec{b}\right)$ ， $∴\vec{b}⋅\left(\vec{a}−\vec{b}\right)=\vec{a}⋅\vec{b}−\vec{b}^{2}=0$ ， $∴\vec{a}⋅\vec{b}=\left|\vec{b}\right|^{2}$，

又 $\left|\vec{a}\right|=2\left|\vec{b}\right|$ ， $∴cos\left⟨ \vec{a},\vec{b}\right⟩=\frac{\vec{a}⋅\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|\vec{b}|^{2}}{2|\vec{b}|^{2}}=\frac{1}{2}$ ，

$∵$ $\left⟨\vec{a},\vec{b}\right⟩\in \left[0,π\right]$，

$∴$ $\left⟨\vec{a},\vec{b}\right⟩=\frac{π}{3}$．

故选*B*．

4.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查正余弦定理在解三角形中的应用，属于中档题．
由已知$b^{2}+c^{2}=a^{2}+bc$，利用余弦定理可得$cosA=\frac{1}{2}$，可得$A=\frac{π}{3}$，由$sin B⋅sinC=sin^{2}A$，利用正弦定理可得$bc=a^{2}$，代入$b^{2}+c^{2}=a^{2}+bc$，可得$b=c.$由此可以确定三角形形状．

【解答】
解：因为$b^{2}+c^{2}=a^{2}+bc$，所以$bc=b^{2}+c^{2}−a^{2}$，
利用余弦定理可得$cosA=\frac{b^{2}+c^{2}−a^{2}}{2bc}=\frac{1}{2}$，
因为$A\in (0,π)$，
故$A=\frac{π}{3}$，
因为$sinB·sinC=sin^{2}A$，利用正弦定理可得$bc=a^{2}$，
代入$b^{2}+c^{2}=a^{2}+bc$可得$(b−c)^{2}=0$，故$b=c$，
所以$△ABC$为等边三角形．
故选*C*．

5.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题主要考查解三角形中的正弦定理的应用，属于中档题．
在两个三角形中用两次正弦定理，然后两式作比，即可整理出要求的式子．

【解答】
解：设$∠CAD=θ$，在$△ACD$中，由正弦定理可得：$\frac{AC}{sin∠ADC}=\frac{CD}{sinθ}①.$
由$AB⊥AD$可得$∠BAD=\frac{π}{2}$，则$∠BAC=\frac{π}{2}−θ$，
$∠ACB=π−∠ABC−∠BAC=π−\frac{3π}{4}−\frac{π}{2}+θ=θ−\frac{π}{4}$，
在$△ABC$中，由正弦定理可得$\frac{AC}{sin∠ABC}=\frac{AB}{sin∠ACB}②.$
$①②$两式相除，得$\frac{sin∠ABC}{sin∠ADC}=\frac{CD}{AB}⋅\frac{sin∠ACB}{sinθ}$，
即$\frac{sin\frac{3π}{4}}{sin\frac{π}{6}}=\frac{4}{1}⋅\frac{sin(θ−\frac{π}{4})}{sinθ}$，
整理得$sinθ=2cosθ$，化简得$tanθ=2$．
故选：$C$．

6.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题考查函数零点、方程的根的个数，是中档题．
将问题转化为$f(x)$与$y=a$有四个不同的交点，应用数形结合思想判断各交点横坐标的范围及数量关系，即可判断各选项的正误$.$

【解答】

解：$y=f\left(x\right)−a$有四个不同的零点$x\_{1}$、$x\_{2}$、$x\_{3}$、$x\_{4}$，即$f\left(x\right)=a$有四个不同的解．

$f(x)$的图象如下图示，



由图知：$0<a<1,x\_{1}<0<x\_{2}<1$，

所以$x\_{2}−x\_{1}>0$，即$x\_{2}−x\_{1}$的取值范围是$(0,+\infty )$．

由二次函数的对称性得：$x\_{3}+x\_{4}=4$，

因为$1−2^{x\_{1}}=2^{x\_{2}}−1$，即$2^{x\_{1}}+2^{x\_{2}}=2$，故$\frac{2^{x\_{1}}+2^{x\_{2}}}{x\_{3}+x\_{4}}=\frac{1}{2}$．

故选：$D$

7.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题主要考查二次方程根的分布，属于中档题．
根据一元二次方程根的分布，结合二次函数的图象性质即可求解．

【解答】

解：记 $f\left(x\right)=2kx^{2}−2x−5k−1$ ，由题意可知函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点，所以 $k\ne 0$ ，

若 $k>0$ ，则 $f\left(x\right)=2kx^{2}−2x−5k−1$ 为开口向上的二次函数，

要有两个零点且一个大于$1$一个小于$1$，则 $f\left(1\right)=2k−2−5k−1<0$ ，得 $k>−1$ ，故 $k>0$ ；

若 $k<0$ ，则 $f\left(x\right)=2kx^{2}−2x−5k−1$ 为开口向下的二次函数，

要有两个零点且一个大于$1$一个小于$1$，
则 $f\left(1\right)=2k−2−5k−1>0$ ，得 $k<−1$ ，故 $k<−1$ ，

综上可知： $k<−1$ 或 $k>0$ ，即实数$k$的取值范围是 $\left(−\infty ,−1\right)∪\left(0,+\infty \right)$ ．

故答案为： $\left(−\infty ,−1\right)∪\left(0,+\infty \right)$．

8.【答案】$A$

【解析】【分析】

本题考查了平面向量数量积的运算和两角和的正弦公式，属较难题．
由平面向量的数量积运算，结合两角和的正弦公式，求三角函数的最值即可．

【解答】
解：由题意，建立如图所示的坐标系，设扇形半径为$2$，
由$∠AOB=\frac{3π}{4}$，可得$A(−\sqrt[ ]{2},\sqrt[ ]{2})$，$B(2,0)$，
设$C(2cosθ,2sinθ)$，$θ\in [0,\frac{3π}{4}]$，
由$\vec{OC}=x\vec{OA}+y\vec{OB}$，可得$(2cosθ,2sinθ)=x(−\sqrt[ ]{2},\sqrt[ ]{2})+y(2,0)$，
所以$\left\{\begin{matrix}2cosθ=2y−\sqrt[ ]{2}x\\2sinθ=\sqrt[ ]{2}x\end{matrix}\right.$，整理得：$\left\{\begin{matrix}x=\sqrt[ ]{2}sinθ\\y=sinθ+cosθ\end{matrix}\right.$，
则$x+\sqrt[ ]{2}y=2\sqrt[ ]{2}sinθ+\sqrt[ ]{2}cosθ=\sqrt[ ]{10}sin(θ+φ)$，其中$tanφ=\frac{1}{2}$，
所以当$sin(θ+φ)=1$时，$x+\sqrt[ ]{2}y$有最大值$\sqrt[ ]{10}$．
故选：$A$．

9.【答案】$AD$

【解析】【分析】

本题考查复数的运算，复数的模，共轭复数，属于基础题，
根据复数的运算，复数的模，共轭复数的性质逐项判断即可．

【解答】
对$A$：设$z=a+bi(a\in R,b\in R)$，则 $\overline{z}=a−bi$，因此$z$ $⋅$ $\overline{z}=$ $a^{2}+$ $b^{2}=$ $|z|^{2}$，故 *A*选项对；
对$B$：取$z=i$，则$\overline{z}=−i$，$z^{2}=−1$，$|\overline{z}|^{2}=1$， 故*B*选项错；
对$C$：取$z=1+i$，则$\overline{z}=1−i$，$z+\overline{z}=2$，故 *C*选项错；
对$D$：设$z=a+bi(a\in R,b\in R)$，则 $\overline{z}=a−bi$，$|z|+|\overline{z}|=2\sqrt[ ]{a^{2}+b^{2}}⩾2|a|=|z+\overline{z}|$，故选项*D*对．
故答案选*AD*．

10.【答案】$BCD$

【解析】【分析】

本题考查两角和差的三角函数及二倍角公式及其应用，属于中档题．
根据两角和差的三角函数及二倍角公式逐项化简计算即可确定．

【解答】
解：对于$A$．$\frac{1}{sin50^{∘}}+\frac{\sqrt[ ]{3}}{cos50^{∘}}=\frac{cos50^{o}+\sqrt[ ]{3}sin 50^{o}}{sin 50^{∘}·cos 50^{∘}}$
$=\frac{2(\frac{1}{2}cos50°+\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}sin50°)}{\frac{1}{2}sin100°}=\frac{2sin80°}{\frac{1}{2}sin100°}=4$，故*A*错误；
 对于$B$．$sin7^{∘}cos23^{∘}+sin83^{∘}cos67^{∘}=sin7^{∘}cos23^{∘}+cos7^{∘}sin23^{∘}$
$=sin 30°=\frac{1}{2}$，故*B*正确；
$对于C.\frac{tan22.5°}{1−tan^{2}22.5°}=\frac{1}{2}×\frac{2tan22.5°}{1−tan^{2}22.5°}=\frac{1}{2}tan45°=\frac{1}{2}$，故*C*正确；
$对于D.\frac{1}{(1+tan22°)(1+tan23°)}=\frac{1}{1+tan22°+tan23°+tan22°tan23°}$，
因为 $1=tan 45°=\frac{tan 22°+tan 23°}{1−tan 22°tan 23°}$，
故 $tan 22°+tan 23°=1−tan 22°tan 23°$，
所以$1+tan 22°+tan 23°+tan 22°tan 23°=2$
即原式为 $\frac{1}{2}$，故*D*正确．
故本题选*BCD*．

11.【答案】$ACD$

【解析】【分析】

本题考查正弦定理的应用，正弦函数的性质，三角恒等变换的应用，属于中档题．
根据边角的关系，可判断三角形的个数，即可判断$AB$；根据三角形是锐角三角形，求角$C$的范围，再利用正弦定理即可判断$C$；利用正弦定理，将边表示为三角函数，再利用三角函数的性质，即可判断$D$，得出结果．

【解答】

解：对于$A$，因为$B=\frac{π}{4},1<b<\sqrt[ ]{2}$，$c=\sqrt[ ]{2}$，
所以$csinB<b<c$，则$△ABC$有两解，故*A*正确；

对于$B$，因为$B\in \left(\frac{π}{2},π\right),b>\sqrt[ ]{2}$，所以$△ABC$有且仅有一解，故*B*错误；

对于$C$，由题意得$\left\{\begin{matrix}0<π−3C<\frac{π}{2}\\0<2C<\frac{π}{2}\\0<C<\frac{π}{2}\end{matrix}\right.$，解得$\frac{π}{6}<C<\frac{π}{4}$，则$sinC\in (\frac{1}{2},\frac{\sqrt[ ]{2}}{2})$，

由正弦定理得$\frac{a}{sinA}=\frac{c}{sinC}$，则$sinA=\frac{asinC}{c}\in (\frac{\sqrt[ ]{2}}{4}a,\frac{1}{2}a)$，故*C*正确；

对于$D$，因为$A+B=2C$，又$A+B+C=π$，解得$C=\frac{π}{3}$，
由正弦定理得$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=\frac{\sqrt[ ]{2}}{\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}}=\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}$，

所以$a=\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}sinA,b=\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}sinB$，
则$a+b=\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}sinA+\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}sinB=\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}sinA+\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}sin (\frac{2π}{3}−A)$
$=\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}(\frac{3}{2}sinA+\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}cosA)=2\sqrt[ ]{2}sin (A+\frac{π}{6})$，
由$0<A<\frac{2π}{3}$，得$\frac{π}{6}<A+\frac{π}{6}<\frac{5π}{6}$，

所以当$A+\frac{π}{6}=\frac{π}{2}$，即$A=\frac{π}{3}$时，$a+b$取得最大值$2\sqrt[ ]{2}$，故*D*正确．

故选*ACD*．

12.【答案】$BC$

【解析】【分析】

本题主要考查了向量的数量积的概念及其运算，利用向量的数量积求向量的夹角，投影向量，是中档题．
利用向量的模长公式以及题中条件即可判断$A$，$C$，由夹角公式可判断$B$，根据投影向量的求法即可判断$D$．

【解答】

解： $∵\left|\vec{a}\left|=\right|\vec{b}\right|=2$ ， $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\sqrt[ ]{3}$ ，

$∴12=|\vec{a}+\vec{b}|^{2}=\vec{a}^{2}+2\vec{a}⋅\vec{b}+\vec{b}^{2}=4+2\vec{a}⋅\vec{b}+4$ ，
解得 $\vec{a}⋅\vec{b}=2$ ，故*A*错误；

 $cos\left⟨\vec{a},\vec{b}\right⟩=\frac{\vec{a}⋅\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{1}{2}$ ，

由于 $⟨\vec{a},\vec{b}⟩\in \left[0,π\right]$ ， $∴\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{π}{3}$ ，故*B*正确；

$\left|\vec{a}−\vec{b}\right|=\sqrt[ ]{\left(\vec{a}−\vec{b}\right)^{2}}=\sqrt[ ]{\vec{a}^{2}−2\vec{a}⋅\vec{b}+\vec{b}^{2}}=\sqrt[ ]{4−2\vec{a}⋅\vec{b}+4}=2<\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\sqrt[ ]{3}$ ，故*C*正确；

$\vec{a}−\vec{b}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{b}⋅\left(\vec{a}−\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}⋅\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{\vec{a}⋅\vec{b}−\vec{b}^{2}}{2}⋅\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=−\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=−\frac{1}{2}\vec{b}$ ，故*D*错误．

故选：$BC$

13.【答案】$−\frac{3}{2}$

【解析】【分析】

本题考查纯虚数的定义等基础知识，考查运算求解能力等数学核心素养，是基础题．
利用纯虚数的定义直接求解．

【解答】
解：$i$是虚数单位，复数$z=2m^{2}−m−6+(m−2)i$是纯虚数，
$∴\left\{\begin{matrix}2m^{2}−m−6=0\\m−2\ne 0\end{matrix}\right.$，
解得实数$m=−\frac{3}{2}$．
故答案为：$−\frac{3}{2}$．

14.【答案】$\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3}$

【解析】【分析】

本题主要考查向量的数量积以及正余弦定理的综合应用，属于难题．
通过向量的数量积以及正余弦定理转化求解该三角形的外接圆的半径$R$即可．

【解答】
解：
因为$\overset{\to }{AB}⋅\overset{\to }{BC}=accos⁡(π−B)=−\frac{1}{2}ac=−2$，
所以$ac=4$，
由余弦定理可得，$b^{2}=a^{2}+c^{2}−2accosB$，
又因为$sinA+sinC=2sinB$，所以$a+c=2b$，
所以$\frac{\left(a+c\right)^{2}}{4}=\left(a+c\right)^{2}−3ac$，
所以$\frac{3\left(a+c\right)^{2}}{4}=12$，
即$\left(a+c\right)^{2}=16$，所以$a+c=4$，故$b=2$，
所以$2R=\frac{b}{sinB}=\frac{2}{sin60°}=\frac{4\sqrt[ ]{3}}{3}$，
所以$R=\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3}$．
故答案为$\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3}$．

15.【答案】$\frac{\sqrt[ ]{2}}{3}$

【解析】【分析】

本题考查平行向量的数量积的坐标运算，三角恒等变换以及同角三角关系，属于基础题．
首先算出$\vec{AC},\vec{BC}$的坐标，根据数量积公式算出$sinα+cosα=\frac{2}{3}$，即可得解．

【解答】
解：由题意可得$\overset{\to }{AC}=(cosα−3,sinα),\overset{\to }{BC}=(cosα,sinα−3),$
$∵\vec{AC}·\vec{BC}=−1$，
$∴(cosα−3)cosα+sinα(sinα−3)=−1$，
又$sin^{2}α+cos^{2}α=1$，$∴sinα+cosα=\frac{2}{3}$，
即$\sqrt[ ]{2}sin(α+\frac{π}{4})=\frac{2}{3}$，$∴sin(α+\frac{π}{4})=\frac{\sqrt[ ]{2}}{3}$．
故答案为$\frac{\sqrt[ ]{2}}{3}$．

16.【答案】$\left(\sqrt[ ]{3},2\right]$

【解析】【分析】本题主要考查了三角函数恒等变换的应用，正弦定理以及正弦函数的图象和性质在解三角形中的综合应用，属于中档题．
利用三角函数恒等变换的应用化简已知等式可得$sinBsinC=\sqrt[ ]{3}sinCcosB$，结合$sinC\ne 0$，可得$tanB=\sqrt[ ]{3}$，由$B$为锐角，可得$B=\frac{π}{3}$，由正弦定理，三角函数恒等变换的应用可求$a+c=2sin(A+\frac{π}{6})$，由已知可求范围$A\in (\frac{π}{6},\frac{π}{2})$，利用正弦函数的图象和性质可求其范围．
【解答】解：$∵cosA+cosB(cosC−\sqrt[ ]{3}sinC)=0$，
$$∴cosB(cosC−\sqrt[ ]{3}sinC)=cos(B+C)$$

$=cosBcosC−sinBsinC$，
可得：$sinBsinC=\sqrt[ ]{3}sinCcosB$，
$∵sinC\ne 0$，
$∴$可得：$tanB=\sqrt[ ]{3}$，
$∴$由$B$为锐角，可得$B=\frac{π}{3}$，
$∵$由正弦定理$\frac{a}{sinA}=\frac{c}{sinC}=\frac{1}{\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}}=\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3}$，$b=1$，
$$∴a+c=\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3}(sinA+sinC)$$

$$=\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3}[sinA+sin(\frac{2π}{3}−A)]$$

$=\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3}(\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}cosA+\frac{3}{2}sinA)=2sin(A+\frac{π}{6})$，
$∴\left\{\begin{matrix}A\in (0,\frac{π}{2})\\C\in (0,\frac{π}{2}),\\A=\frac{2π}{3}−C\end{matrix}\right.$可得：$A\in (\frac{π}{6},\frac{π}{2})$，
$∴A+\frac{π}{6}\in (\frac{π}{3},\frac{2π}{3})$，可得：$sin(A+\frac{π}{6})\in (\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},1]$，
$∴a+c=2sin(A+\frac{π}{6})\in (\sqrt[ ]{3},2]$．
故答案为：$(\sqrt[ ]{3},2]$．

17.【答案】解：$(1)$若$k\vec{a}+2\vec{b}$与$3\vec{a}+4\vec{b}$共线，
则存在$λ$，使得$k\vec{a}+2\vec{b}=λ(3\vec{a}+4\vec{b})$，
即$(k−3λ)\vec{a}+(2−4λ)\overline{b}=\vec{0}$，
又因为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线，
所以$\left\{\begin{matrix}k−3λ=0\\2−4λ=0\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}λ=\frac{1}{2}\\k=\frac{3}{2}\end{matrix}\right.$，
所以$k=\frac{3}{2}$．
$(2)\vec{a}·\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|cos\left⟨\vec{a},\vec{b}\right⟩=3×2\sqrt[ ]{2}×(−\frac{\sqrt[ ]{2}}{2})=−6$，
$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt[ ]{\vec{a}^{2}+2\vec{a}⋅\vec{b}+\vec{b}^{2}}=\sqrt[ ]{9−12+8}=\sqrt[ ]{5}$，
$(3)cos(\vec{a},\vec{a}+\vec{b})=\frac{\vec{a}⋅(\vec{a}+\vec{b})}{|a||a+b|}=\frac{a^{2}+\vec{a}⋅\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{a+b}|}=\frac{9−6}{3\sqrt[ ]{5}}=\frac{\sqrt[ ]{5}}{5}$．

【解析】本题考查向量共线定理，向量的模长，数量积，属于中档题．
$(1)$由$k\vec{a}+2\vec{b}$与$3\vec{a}+4\vec{b}$共线，利用向量的共线定理求出$k$；
$(2)$利用向量的数量积和模长公式求出$\vec{a}·\vec{b}$和$|\vec{a}+\vec{b}|;$
$(3)$利用向量的数量积公式求出$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角的余弦值．

18.【答案】解：$(1)$若$z$是纯虚数，则 $\left\{\begin{matrix}m^{2}−4m−5=0\\m^{2}+5m+4\ne 0\end{matrix}\right.$ ，解得$m=5$ ，

所以当$m=5$ 时，$z$是纯虚数；

$(2)$若$m=−2$ ，则 $z=7−2i$ ，

所以 $\left|z\right|=\sqrt[ ]{7^{2}+\left(−2\right)^{2}}=\sqrt[ ]{53}$ ；

$(3)$因为复数 $\overline{z}=\left(m^{2}−4m−5\right)−\left(m^{2}+5m+4\right)i$ ，对应的点为 $\left(m^{2}−4m−5,−(m^{2}+5m+4)\right)$ ，

若复数 $\overline{z}$ 在复平面内对应的点在第三象限，

则 $\left\{\begin{matrix}m^{2}−4m−5<0\\−\left(m^{2}+5m+4\right)<0\end{matrix}\right.$ ，解得 $−1<m<5$ ，

故实数$m$的取值范围为 $\left(−1,5\right)$ ．

【解析】 本题考查复数的代数表示及其几何意义，复数的概念与分类，复数的模及其几何意义，属于一般题．
$(1)$根据复数的相关概念列式求解；

$(2)$根据复数的模长公式运算求解；

$(3)$根据共轭复数的概念以及复数的几何意义列式求解．

19.【答案】解：$(1)$因为$2S=\sqrt[ ]{3}\vec{AB}⋅\vec{CB}$，

则$acsinB=\sqrt[ ]{3}cacosB$，

所以$tanB=\sqrt[ ]{3}$，又$B\in \left(0,π\right)$，则$B=\frac{π}{3}$；

$(2)$由$△ABC$为锐角三角形及$B=\frac{π}{3}$，

得$C=\frac{2π}{3}−A\in (0,\frac{π}{2})$且$A\in \left(0,\frac{π}{2}\right)$，所以$A\in (\frac{π}{6},\frac{π}{2})$，

由正弦定理$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$，

得$\frac{a+c}{b}=\frac{sinA+sinC}{sinB}=\frac{2}{\sqrt[ ]{3}}(sinA+sinC)$

$$=\frac{2}{\sqrt[ ]{3}}[sinA+sin(\frac{2π}{3}−A)]$$

$=\frac{2}{\sqrt[ ]{3}}\left(\frac{3}{2}sinA+\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}cosA\right)=\sqrt[ ]{3}sinA+cosA=2sin(A+\frac{π}{6})$，

因为$A\in (\frac{π}{6},\frac{π}{2}),\frac{π}{3}<A+\frac{π}{6}<\frac{2π}{3},\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}<sin(A+\frac{π}{6})\leq 1$，

所以$\sqrt[ ]{3}<2sin(A+\frac{π}{6})\leq 2$，即$\frac{a+c}{b}$的取值范围是$(\sqrt[ ]{3},2]$．

【解析】本题考查利用正弦定理解决范围与最值问题，三角形面积公式
$(1)$利用向量的数量积公式和三角形的面积公式求解；

$(2)$利用正弦定理边化角将$\frac{a+c}{b}$转化为三角函数，利用三角函数的性质求解．

20.【答案】解：$(1)$由题意得$S=\frac{1}{2}absinC$，
$a^{2}sin C=accosBsinC+S =accosBsinC+\frac{1}{2}absinC$，
由正弦定理得$sin^{2}AsinC=sinAsinCcosBsinC+\frac{1}{2}sinAsinBsinC$．
因为$A$，$B$，$C$为三角形内角，所以$sinA>0$，$sinB>0,sinC>0$，
所以$sinA=cosBsinC+\frac{1}{2}sinB$．
因为$sinA=sin\left(B+C\right)=sinBcosC+sinCcosB$，
所以$\frac{1}{2}sinB=sinBcosC$，所以$cosC=\frac{1}{2}$．
又因为$C\in (0,π)$，所以$C=\frac{π}{3}$．
$(2)$由$bsin C+csin B=6sin B$，得$bc+bc=6b$，
即$2c=6$，$c=3$，
设$△ABC$的周长为$L$，
则$L=a+b+c=a+b+3$．
由余弦定理得：$c^{2}=a^{2}+b^{2}−2abcosC$，
即$9=a^{2}+b^{2}−ab$，即$\left(a+b\right)^{2}=9+3ab$．
因为$ab⩽\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}$，当且仅当$a=b$时等号成立，
所以$\frac{3}{4}\left(a+b\right)^{2}⩾3ab$，
所以$\frac{3}{4}\left(a+b\right)^{2}+9⩾3ab+9$，
即$\frac{3}{4}\left(a+b\right)^{2}+9⩾\left(a+b\right)^{2}$，
即$\frac{1}{4}\left(a+b\right)^{2}⩽9$，
即$\left(a+b\right)^{2}⩽36$，
所以$a+b⩽6$，当且仅当$a=b=3$时等号成立．
所以$L\_{max}=9$．

【解析】本题考查了三角形正余弦定理的综合运用，及基本不等式的应用，属于中档题．
$(1)$由题意得$S=\frac{1}{2}absinC$，将$S$代入$a^{2}sinC=accosBsinC+S$以后，灵活运用正弦定理与三角函数知识进行化简即可$;$
$(2)$由题意求出$c=3$，根据余弦定理得$\left(a+b\right)^{2}=9+3ab$，之后运用基本不等式求解可得$a+b$的最大值，即可求出三角形周长最大值．

21.【答案】解：$(1)$依题意$\vec{CB}=\frac{1}{2}\vec{OA}$，$\vec{AM}=\frac{2}{3}\vec{AB}$，
$$∴\vec{AM}=\frac{2}{3}(\vec{OB}−\vec{OA})=\frac{2}{3}(\vec{OC}+\vec{CB})−\frac{2}{3}\vec{OA}$$

$=\frac{2}{3}\vec{OC}+\frac{1}{3}\vec{OA}−\frac{2}{3}\vec{OA}=\frac{2}{3}\vec{OC}−\frac{1}{3}\vec{OA}$，
$∴\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}=\vec{OA}+(\frac{2}{3}\vec{OC}−\frac{1}{3}\vec{OA})=\frac{2}{3}\vec{OA}+\frac{2}{3}\vec{OC}$；
$(2)$因$OM$交$AC$于$D$，
由$(1)$知$\vec{OD}=t\vec{OM}=t(\frac{2}{3}\vec{OA}+\frac{2}{3}\vec{OC})=\frac{2t}{3}\vec{OA}+\frac{2t}{3}\vec{OC}$，
由共起点的三向量终点共线的充要条件知，$\frac{2t}{3}+\frac{2t}{3}=1$，
则$t=\frac{3}{4}$，$\vec{OD}=3\vec{DM}$，
则$\frac{|\vec{OD}|}{|\vec{DM}|}=3$，即$\frac{OD}{DM}=3$；
$(3)$由已知$\vec{OB}=\vec{OC}+\vec{CB}=\vec{OC}+\frac{1}{2}\vec{OA}$，
因$P$是线段$BC$上动点，则令$\vec{CP}=x\vec{OA}(0⩽x⩽\frac{1}{2})$，
$$\vec{OB}=λ\vec{CA}+μ\vec{OP}=λ(\vec{OA}−\vec{OC})+μ(\vec{OC}+\vec{CP})$$

$=(λ+μx)\vec{OA}+(μ−λ)\vec{OC}$，
又$\vec{OC},\vec{OA}$不共线，
则有$\left\{\begin{matrix}μ−λ=1\\λ+μx=\frac{1}{2}\end{matrix}\right.⇒\left\{\begin{matrix}λ=μ−1\\μ=\frac{3}{2+2x}\end{matrix}\right.,$
则$0⩽x⩽\frac{1}{2}⇒1⩽x+1⩽\frac{3}{2}⇒1⩽μ⩽\frac{3}{2}$，
$∴λ⋅μ=μ(μ−1)=(μ−\frac{1}{2})^{2}−\frac{1}{4}$在$μ\in [1,\frac{3}{2}]$上递增，
所以$μ=1,(λ⋅μ)\_{min}=0,μ=\frac{3}{2},(λ⋅μ)\_{max}=\frac{3}{4}$，
故$λ⋅μ$的取值范围是$[0,\frac{3}{4}]$．

【解析】本题考查了向量的加减，数乘运算，向量共线的充要条件，平面向量基本定理及其应用，二次函数的最值问题，属于较难题．
$(1)$由已知得$\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}$，利用向量的加减，数乘运算，即可用$\vec{OA}$和$\vec{OC}$表示$\vec{OM}$；
$(2)$由$(1)$知$\vec{OD}=t\vec{OM}$，利用共起点的三向量终点共线的充要条件得$t=\frac{3}{4}$，即可求出$\frac{OD}{DM}$的值；
$(3)$由$P$是线段$BC$上动点，且$\vec{OC},\vec{OA}$不共线，可得$λ⋅μ=(μ−\frac{1}{2})^{2}−\frac{1}{4}$，利用二次函数的性质，即可求出$λ⋅μ$的取值范围．

22.【答案】解：$f(x)=2sin(\frac{π}{2}−x)sin(\frac{π}{2}+x)−1+2\sqrt[ ]{3}sinxcosx$
$$=2cos^{2}x−1+2\sqrt[ ]{3}sinxcosx$$

$$=2⋅\frac{1+cos2x}{2}−1+\sqrt[ ]{3}sin2x$$

$$=cos2x+\sqrt[ ]{3}sin2x$$

$$=2(\frac{1}{2}cos2x+\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}sin2x)$$

$=2sin(2x+\frac{π}{6})$，
$(1)$由$\frac{π}{2}+2kπ\leq 2x+\frac{π}{6}\leq \frac{3}{2}π+2kπ$，$k\in Z$，
可得$\frac{π}{6}+kπ\leq x\leq \frac{2}{3}π+kπ$，$k\in Z$，
即$f(x)$的单调递减区间为$[\frac{π}{6}+kπ,\frac{2}{3}π+kπ]$，$k\in Z$；
$(2)$因为$0\leq x\leq \frac{π}{2}$，所以$\frac{π}{6}\leq 2x+\frac{π}{6}\leq \frac{7}{6}π$，
所以$−\frac{1}{2}\leq sin(2x+\frac{π}{6})\leq 1$，所以$−1\leq 2sin(2x+\frac{π}{6})\leq 2$，
当$2x+\frac{π}{6}=\frac{π}{2}$时，即$x=\frac{π}{6}$时，$[f(x)]\_{max}=2$，
当$2x+\frac{π}{6}=\frac{7π}{6}$时，即$x=\frac{π}{2}$时，$[f(x)]\_{min}=−1$，
$(3)$由题意可得，$f(x\_{1})=f(x\_{2})=\frac{6}{5}$．
即$2sin(2x\_{1}+\frac{π}{6})=2sin(2x\_{1}+\frac{π}{6})=\frac{6}{5}$，
所以$sin(2x\_{1}+\frac{π}{6})=sin(2x\_{2}+\frac{π}{6})=\frac{3}{5}$．
所以$2x\_{1}+\frac{π}{6}+2x\_{2}+\frac{π}{6}=π$，即可得$x\_{1}+x\_{2}=\frac{π}{3}$，
所以$sin(x\_{1}−x\_{2})=sin[x\_{1}−(\frac{π}{3}−x\_{1})]=sin(2x\_{1}−\frac{π}{3})$，
因为已知$sin(2x\_{1}+\frac{π}{6})=\frac{3}{5}$，所以可设$2x\_{1}+\frac{π}{6}=t$，则$2x\_{1}=t−\frac{π}{6}$，
所以$sin(x\_{1}−x\_{2})=sin(2x\_{1}−\frac{π}{3})=sin(t−\frac{π}{6}−\frac{π}{3})=sin(t−\frac{π}{2})=−cost$，
因为$sint=\frac{3}{5}$，且$2x\_{1}+\frac{π}{6}=t\in (0,\frac{π}{2})$，所以$cost=\frac{4}{5}$，
所以$sin(x\_{1}−x\_{2})=−cost=−\frac{4}{5}$．

【解析】本题考查了三角恒等变换的综合应用、求正弦型函数的单调区间、最值和正弦$($型$)$函数的零点，是较难题．
$(1)$由三角恒等变换得$f(x)=2sin(2x+\frac{π}{6})$，由$\frac{π}{2}+2kπ\leq 2x+\frac{π}{6}\leq \frac{3}{2}π+2kπ$，$k\in Z$，可得函数$f(x)$的单调递减区间；
$(2)$由$0\leq x\leq \frac{π}{2}$，得$\frac{π}{6}\leq 2x+\frac{π}{6}\leq \frac{7}{6}π$，由三角函数性质可得函数的最值；
$(3)$由题意可得，$f(x\_{1})=f(x\_{2})=\frac{6}{5}$可得$x\_{1}+x\_{2}=\frac{π}{3}$，由三角恒等变换可得$sin(x\_{1}−x\_{2})$的值．