**2023-2024学年度第二学期高一数学期中复习卷5**

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.若复数$z$满足$2z+\overline{z}=3−2i$，其中$i$为虚数单位，则$z$等于(    )

A. $1+2i$ B. $1−2i$ C. $−1+2i$ D. $−1−2i$

2.已知函数$f(x)=3^{x}+x,g(x)=log\_{3}x+x$，$ℎ(x)=−x$的零点分别为$a$，$b$，$c$，则$a$，$b$，$c$的大小关系(    )

A. $a>b>c$ B. $b>c>a$ C. $c>a>b$ D. $b>a>c$

3.下列说法中正确的是(    )

A. 单位向量都相等 B. 若$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|>|\vec{b}|$且$\vec{a}$与$\vec{b}$同向，则$\vec{a}>\vec{b}$
C. 对于任意向量$\vec{a},\vec{b}$，必有$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|⩽\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$ D. 平行向量不一定是共线向量

4.在$ΔOAB$中，$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$，$\vec{OP}=\vec{p}$，若$\vec{p}=t(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}),t\in R$，则点$P$在 (    )

A. $∠AOB$平分线所在的直线上 B. 线段$AB$垂直平分线上
C. $AB$边所在直线上 D. $AB$边的中线上

5.已知$a$，$b$，$c$分别为$△ABC$内角$A$，$B$，$C$的对边，$2sinC=csinB$，$acosB−c=1$，$△ABC$的面积为$\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，则$a=$(    )

A. $\sqrt[ ]{3}$ B. $2$ C. $\sqrt[ ]{6}$ D. $\sqrt[ ]{7}$

6.在$△ABC$中，角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，已知$\frac{c−a}{2c}=sin^{2}\frac{B}{2}$，则$△ABC$的形状为(    )

A. 直角三角形 B. 等边三角形 C. 等腰三角形或直角三角形 D. 等腰直角三角形

7.在$▵ABC$中，角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，已知$a=2$，且$b(cosA+1)=2cosB$，则$▵ABC$周长的取值范围是(    )

A. $(2,4)$ B. $(4,6)$ C. $(2,6)$ D. $(2\sqrt[ ]{3}+2,6)$

8.如图，已知扇形$AOB$的半径为$1$，其圆心角为$\frac{π}{3}$，四边形$PQRS$是该扇形的内接矩形，则该矩形面积的最大值为 (    )

A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$ C. $\frac{12}{13}$ D. $\frac{\sqrt[ ]{3}}{6}$

二、多选题：本题共**4**小题，共**20**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9.下列叙述中错误的是(    )

A. 若$\vec{a}=\vec{b}$，则$3\vec{a}>2\vec{b}$ B. 已知非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$且$\vec{a}/​/\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同或相反
C. 若$\vec{a}/​/\vec{b}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则$\vec{a}//\vec{c}$ D. 对任一非零向量$\vec{a}$，$\frac{\vec{a}}{|\vec{a|}}$是一个单位向量

10.下列命题正确的(    )

A. 若复数$z=(1−i)(2−i)$，则$|z|=\sqrt[ ]{10}$
B. 若$z\_{1}=2−i$，$z\_{2}=1−3i$，则复数$z\_{1}−z\_{2}$的虚部是$2i$
C. 若$|z−1|=2$，则$|z−1−3i|$的最小值为$1$
D. 已知$k\in $，若关于$x$的方程$x^{2}+(k+2i)x+2+ki=0$有实数根，则实根必为$x=\sqrt[​]{2}$．

11.已知函数$f(x)=3cos^{2}x−sin^{2}x+4sin xcos x$，则下列说法正确的是(    )

A. $f(x)$的最小正周期是$π$ B. $f(x)$的最小值是$1−2\sqrt[ ]{2}$
C. 直线$x=\frac{3π}{8}$是图像的一条对称轴 D. 直线$x=\frac{π}{8}$是图像的一条对称轴

12.在$▵ABC$中，角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，则下列命题正确的是(    )

A. 若$A>B$，则$sinA>sinB$
B. 若$a=3\sqrt[ ]{3},b=3,B=\frac{π}{6}$，则$A=\frac{π}{3}$
C. 若$\frac{c}{b}<cosA$，则$▵ABC$为钝角三角形
D. 若$a=\sqrt[ ]{3},b=4$，且$2absinC=\sqrt[ ]{3}\left(a^{2}+b^{2}−c^{2}\right)$，则$▵ABC$的面积为$3$

三、填空题：本题共**4**小题，每小题**5**分，共**20**分。

13.已知$i$是虚数单位，复数$z$满足$\frac{2+z}{i−z}=1+2i$，则复数$z=$          ．

14.若$α\in (\frac{π}{2},π)$，且$3cos2α=sin\left(\frac{π}{4}−α\right)$，则$sin2α$的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

15.在$△ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，$a=\sqrt[ ]{21}$，且$4asinBcos^{2}\frac{A}{2}=bsinA$，则$△ABC$外接圆的面积为          ．

16.如图：在$ΔABC$中，点$D$为边$BC$上靠近$B$点的三等分点，过$AD$的中点$O$作动直线$MN$，分别交边$AB$和边$AC$于$N,M$两点，$\vec{AB}=\vec{a}$，$\vec{AC}=\vec{b}$，$\vec{AN}=m\vec{a}$，$\vec{AM}=n\vec{b}$，则$m+2n$的最小值为          ．

四、解答题：本题共**6**小题，共**72**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.$($本小题$12$分$)$已知$z$是复数，$z+2i$与$\frac{z}{2−i}$均为实数．
$(1)$求复数$z$；$(2)$复数$(z+ai)^{2}$在复平面上对应的点在第一象限，求实数$a$的取值范围．

18.$($本小题$12$分$)$已知平行四边形$ABCD$中，$\vec{EC}=2\vec{DE}$，$\vec{FC}=2\vec{BF}$，$\vec{FG}=2\vec{GE}$．
$(1)$用$\vec{AB}$，$\vec{AD}$表示$\vec{AG}$；

$(2)$若$\vec{|AB|}=6$，$\vec{|AD|}=3\sqrt[ ]{2}$，$∠BAD=45°$，如图建立直角坐标系，求$\vec{GB}$和$\vec{DF}$的坐标．



19.$($本小题$12$分$)$已知向量$\vec{m}=(\sqrt[ ]{3}sin \frac{x}{4},2),\vec{n}=(2cos \frac{x}{4},cos^{2}\frac{x}{4}),f(x)=\vec{m}·\vec{n}$．

$(1)$若$f(x)=2$，求$cos(x+\frac{π}{3})$的值；

$(2)$在$△ABC$中，角$A$、$B$、$C$的对边分别是$a$、$b$、$c$，且满足$(2a−\sqrt[ ]{3}c)cosB=\sqrt[ ]{3}bcosC$，求$f(A)$的取值范围．

20.$($本小题$12$分$)$已知$O$为坐标原点，对于函数$f\left(x\right)=asinx+bcosx$，称向量$\vec{OM}=\left(a,b\right)$为函数$f\left(x\right)$的叠加向量$.$已知函数$f\left(x\right)=4cos\frac{x}{2}sin\left(\frac{x}{2}+\frac{π}{6}\right)−1$．

$(1)$求$f\left(x\right)$的叠加向量$\vec{OM}$；

$(2)$若$af\left(2x+\frac{π}{3}\right)+2−cos^{2}x>6cos^{4}x$对任意$x\in \left(−\frac{π}{4},\frac{π}{4}\right)$恒成立，求实数$a$的取值范围．

21.$($本小题$12$分$)$在$△ABC$中，角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，且$acosC+\sqrt[ ]{3}asinC=b+c$．
$(1)$求$A$的值$;(2)$若$a+1=c$，$b>2$，当$△ABC$的周长最小时，求$b$的值$;$
$(3)$若$\vec{BD}=3\vec{DA}$，$cosB=\frac{11}{14}$，且$△ABC$的面积为$20\sqrt[ ]{3}$，求$CD$的长度．

22.$($本小题$12$分$)$在$①acosB+bcosA=2ccosA$；$②\left(sinB−sinC\right)^{2}=sin^{2}A−sinBsinC$；$③S=\frac{1}{4}b\left(bsinA+atanAcosB\right)($其中$S$为$▵ABC$的面积$)$三个条件中任选一个补充在下面问题中，并作答．

在$▵ABC$中，角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，$a=3\sqrt[ ]{3}$且\_\_\_\_\_\_．

$(1)$求$▵ABC$外接圆半径$R$；$(2)$若$▵ABC$为锐角三角形，求$▵ABC$周长的取值范围．

**答案和解析**

1.【答案】$B$

【解析】【分析】
本题考查复数的共轭复数及虚部的概念，同时考查复数相等，属于基础题．
设$z=a+bi(a,b\in R)$，结合已知和复数相等求解即可．
【解答】
解：设$z=a+bi(a,b\in R)$，
则$\overline{z}=a−bi$．
故$2z+\overline{z}$ $=2(a+bi)+a−bi=3a+bi=3−2i$，
所以$\left\{\begin{matrix}3a=3,\\b=−2,\end{matrix}\right.$解得$\left\{\begin{matrix}a=1,\\b=−2,\end{matrix}\right.$
所以$z=1−2i$．
故选*B*．

2.【答案】$B$

【解析】【分析】

本题考查函数零点问题，属于基础题．
求出$c=0$，画出$y=3^{x}$、$y=log\_{3}x$、$y=−x$的图象，由图像可得$a<0$，$b>0$，即可得大小关系．

【解答】
解：由$ℎ(x)=−x=0$得$x=0$，$∴c=0$，
由$f(x)=0$得$3^{x}=−x$，由$g(x)=0$得$log\_{3}x=−x$
在同一平面直角坐标系中画出$y=3^{x}$、$y=log\_{3}x$、$y=−x$的图象，

由图象知$a<0$，$b>0$，$∴a<c<b$
故选*B*．

3.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查向量的定义、向量加法的几何意义、共线向量的定义等知识，属于基础题．
根据相等向量的定义可判断$A$；由向量不能比较大小可判断$B$；由向量加法的几何意义可判断$C$；由共线向量的定义可判断$D$．

【解答】

解：$A$，方向相同，模相等的向量为相等向量，单位向量的方向不一定相同，故*A*错误；

$B$，向量的模能比较大小，向量不能比较大小，故*B*错误；

$C$，根据向量加法的几何意义可得$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|⩽\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$，故*C*正确；

$D$，平行向量也是共线向量，故*D*错误．

故选*C*．

4.【答案】$A$

【解析】【分析】

本题考查单位向量的定义，向量的几何表示，向量加法的几何意义．
利用$\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$和$\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$是$△OAB$中边$OA$、$OB$上的单位向量，可知$\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$在$∠AOB$平分线线上，故$t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$也在$∠AOB$平分线线上．

【解答】
解：$∵\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$，$\vec{OP}=\vec{p}$，
且$\vec{p}=t(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}),t\in R$，
$∵\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$和$\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$是$△OAB$中边$OA$、$OB$上的单位向量，
$∴\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$在$∠AOB$平分线上，
$∴t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$在$∠AOB$平分线上，
$∴$点$P$一定在$∠AOB$平分线上，
故选*A*．

5.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题考查三角形的正弦定理和余弦定理的运用，考查运算能力，属于基础题．
利用正弦定理化角为边可得$b=2$，再将$1$用$\frac{b}{2}$表示，再利用正弦定理化边为角，从而可求得角$A$，再利用三角形的面积公式可求得$c$，最后利用余弦定理即可得解．

【解答】
解：$∵2sinC=csinB$，
由正弦定理得，$2c=bc$，
$∴b=2$，则$1=\frac{b}{2}$，
$∴acosB−c=\frac{b}{2}$，
由正弦定理得，$sinAcosB−sinC=\frac{1}{2}sinB$，
$sinAcosB−sin(A+B)=\frac{1}{2}sinB$，
$sinAcosB−sinAcosB−sinBcosA=\frac{1}{2}sinB$，
$−sinBcosA=\frac{1}{2}sinB$，
$∵sinB\ne 0$，
$∴cosA=−\frac{1}{2}$，$sinA=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，
$S\_{△ABC}=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{1}{2}×bc×\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，
$∴c=1$，
由余弦定理得，$a^{2}=b^{2}+c^{2}−2bccosA=2^{2}+1^{2}−2×1×2×(−\frac{1}{2})=7$，
$∴a=\sqrt[ ]{7}$．
故选*D*．

6.【答案】$A$

【解析】【分析】

本题主要考查正弦定理，二倍角公式，两角和差公式，诱导公式，属于较难题．
利用正弦定理以及二倍角公式可得$\frac{sinC−sinA}{2sinC}=\frac{1−cosB}{2}$，结合诱导公式以及两角和差公式整理可得$sinBcosC=0$，即可求解．

【解答】
解：在$△ABC$中，$A+B+C=π$，
因为$\frac{c−a}{2c}=sin^{2}\frac{B}{2}$，
由正弦定理及二倍角公式得$\frac{sinC−sinA}{2sinC}=\frac{1−cosB}{2}$，
$∴sinC−sinA=sinC−sinCcosB$，
$∴sinA=sinCcosB$，
$∴sin(B+C)=sinBcosC+cosBsinC=sinCcosB$，
$∴sinBcosC=0$，
由$B\in (0,π)$，$sinB>0$，$∴cosC=0$，
由 $C\in (0,π)$，则$C=\frac{π}{2}$，
故$△ABC$为直角三角形．
故选：$A$．

7.【答案】$B$

【解析】【分析】

本题考查正弦定理解三角形以及三角恒等变换的应用，属于中档题．

把已知式中$2$换成$a$后用正弦定理化边为角，由三角函数恒等变换可得$A=2B$，然后由正弦定理把$b,c$用角$B$表示，得周长的表达式，求出$B$角范围后可得周长的范围，

【解答】

解：因为$a=2$，$b\left(cosA+1\right)=2cosB$，所以$b\left(cosA+1\right)=acosB$，

所以$sinB\left(cosA+1\right)=sinAcosB$，

所以$sinB=sinAcosB−cosAsinB=sin\left(A−B\right)$，则$B=A−B$，即$A=2B$．

由正弦定理可得$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$，

则$b=\frac{asinB}{sinA}=\frac{1}{cosB}$，$c=\frac{asinC}{sinA}=\frac{2sin3B}{sin2B}=4cosB−\frac{1}{cosB}$，

故$▵ABC$的周长$l=a+b+c=2+\frac{1}{cosB}+4cosB−\frac{1}{cosB}=4cosB+2$．

因为解得$0<B<\frac{π}{3}$，则$\frac{1}{2}<cosB<1$，
故$▵ABC$的周长$l\in \left(4,6\right)$．

故选：$B$．

8.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题考查在实际问题中建立三角函数模型，属于较难的题．
求解问题的关键是根据图形建立起三角模型，将三角模型用所学的恒等式变换公式进行化简．
设$∠POS=α$，用$α$表示出$RS$，$PS$，由三角恒等变换得$S=\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}sin (2α+\frac{π}{6})−\frac{\sqrt[ ]{3}}{6}$，即可得到该矩形面积的最大值．

【解答】
解： 在$Rt△OPS$中，设$∠POS=α$，则$OS=cos α$，$PS=sin α$，
在$Rt△ORQ$中，$\frac{QR}{OQ}=tan \frac{π}{3}=\sqrt[ ]{3}$，所以$OR=\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}QR=\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}sinα$．
$∴RS=OS−OR=cos α−\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}sinα$．
设矩形$PQRS$的面积为$S$，
则$S=RS·PS=(cos α−\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}sinα)sin α=\frac{1}{2}sin 2α+\frac{\sqrt[ ]{3}}{6}cos2α−\frac{\sqrt[ ]{3}}{6}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}sin (2α+\frac{π}{6})−\frac{\sqrt[ ]{3}}{6}$
由于$0<α<\frac{π}{3}$，
所以当$2α+\frac{π}{6}=\frac{π}{2}$，即$α=\frac{π}{6}$时，$S\_{max}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}−\frac{\sqrt[ ]{3}}{6}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{6}$．
因此，当$α=\frac{π}{6}$时，矩形$PQRS$的面积最大，最大面积为$\frac{\sqrt[ ]{3}}{6}$．
故选$D$．

9.【答案】$AC$

【解析】【分析】

本题考查了向量的基本性质和共线向量，属于基础题．
根据向量的基本性质和共线向量进行判断即可

【解答】
解：$A$，向量无法比较大小，故*A*错误；
$B$，共线向量的方向相同或相反，故*B*正确；
$C$，若$\vec{b}$是零向量，则不成立，故*C*错误；
$D$，对任一非零向量$\vec{a}$，$\frac{\vec{a}}{|\vec{a|}}$是一个与$\vec{a}$方向相同且模长为$1$的单位向量，故*D*正确．
故选*AC*．

10.【答案】$AC$

【解析】【分析】

本题主要考查了复数的模及其几何意义，复数的概念，复数的四则运算，复数集内解方程或分解因式，属于中档题．
由复数的模及其几何意义，复数的概念，复数的四则运算，复数集内解方程或分解因式，逐个判断即可．

【解答】
解：
对于选项*A*$.$若复数$z=(1−i)(2−i)=1−3i$，则$|z|=\sqrt[ ]{10}$，故*A*正确；
对于选项*B*$.$若$z\_{1}=2−i$，$z\_{2}=1−3i$，则复数$z\_{1}−z\_{2}=1+2i$，虚部为$2$，故*B*错误；
对于选项*C*$.$若$|z−1|=2$，则$z$在复平面内对应的点在圆心为$(1,0)$，半径为$2$的圆上，则$|z−1−3i|$表示圆上的动点$Z$到定点$(1,3)$的距离，$∵$点$(1,0)$到$(1,3)$的距离为$3$，则$|z−1−3i|$的最小值为$3−2=1$，故*C*正确；
对于选项*D*$.$设$x=x\_{0}$是方程的实数根，代入方程并整理得$\left(x\_{0}^{2}+kx\_{0}+2\right)+\left(2x\_{0}+k\right)i=0$，
由复数相等的条件可得$\left\{\begin{matrix}x\_{0}^{2}+kx\_{0}+2=0\\2x\_{0}+k=0\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}x\_{0}=\sqrt[ ]{2}\\k=−2\sqrt[ ]{2}\end{matrix}\right.$或$\left\{\begin{matrix}x\_{0}=−\sqrt[ ]{2}\\k=2\sqrt[ ]{2}\end{matrix}\right.$，故*D*错误．
故选*AC*．

11.【答案】$ABD$

【解析】【分析】

本题考查了函数$y=Asin(ωx+φ)$的图象与性质，降幂公式，辅助角公式等，属于中档题．
先利用降幂公式和二倍角公式，辅助角公式，化简$f(x)$，得$f(x)=2\sqrt[ ]{2}sin⁡(2x+\frac{π}{4})+1$，结合函数$y=Asin(ωx+φ)$的图象与性质及正弦函数的图象和性质，逐项判断．

【解答】
解：$∵f(x)=3cos^{2}x−sin^{2}x+4sin xcos x$
$$=\frac{3(1+cos2x)}{2}−\frac{1−cos2x}{2}+2sin2x$$

$$=2cos2x+2sin2x+1$$

$$=2\sqrt[ ]{2}\left(\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}cos2x+\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}sin2x\right)+1$$

$=2\sqrt[ ]{2}sin⁡(2x+\frac{π}{4})+1$．
$∴f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2π}{2}=π$，*A*正确；
当$sin⁡(2x+\frac{π}{4})=−1$时，$f(x)$取得最小值为$1−2\sqrt[ ]{2}$，*B*正确；
函数的对称轴为$2x+\frac{π}{4}=\frac{π}{2}+kπ$，$k\in Z$，
即$x=\frac{π}{8}+\frac{kπ}{2}$，$k\in Z$，
当$k=0$时，$x=\frac{π}{8}$，当$k=1$时，$x=\frac{5π}{8}$，
即直线$x=\frac{π}{8}$是图象的一条对称轴，*D*正确，*C*错误．
故答案为$ABD$．

12.【答案】$ACD$

【解析】【分析】

本题主要考查正弦函数的单调性，正弦定理，余弦定理和三角形面积公式的应用，考查学生的运算能力，属于较难的题．
对于$A$：分$A$是锐角和$A$是钝角两种情况，根据$y=sinx$在$\left(0,\frac{π}{2}\right)$上单调性可判断；
对于$B$：根据正弦定理和角的范围可判断；

对于$C$：根据余弦定理和已知条件可判断；

对于$D$：根据余弦定理和三角形的面积公式可判断．

【解答】

解：对于$A$：若$A>B$，当$A$是锐角时，因为$y=sinx$在$\left(0,\frac{π}{2}\right)$上单调递增，所以$sinA>sinB$，

当$A$是钝角时，$A+B<π$，则$0<B<π−A<\frac{π}{2}$，又因为$y=sinx$在$\left(0,\frac{π}{2}\right)$上单调递增，所以$sinA=sin\left(π−A\right)>sinB$，故*A*正确；

对于$B$：根据正弦定理得$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}$，即$\frac{3\sqrt[ ]{3}}{sinA}=\frac{3}{sin\frac{π}{6}}$，解得$sinA=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，
又$0<A<π$，$a>b$，所以$A=\frac{π}{3}$或$A=\frac{2π}{3}$，故*B*不正确；

对于$C$：根据余弦定理得$cosA=\frac{b^{2}+c^{2}−a^{2}}{2bc}>\frac{c}{b}$，整理得：$a^{2}+c^{2}−b^{2}<0$，
所以$cosB=\frac{a^{2}+c^{2}−b^{2}}{2ac}<0$，又$0<B<π$，所以$B$为钝角，故*C*正确；

对于$D$：因为$a=\sqrt[ ]{3},b=4$，且$2absinC=\sqrt[ ]{3}\left(a^{2}+b^{2}−c^{2}\right)$，
所以$sinC=\sqrt[ ]{3}\left(\frac{a^{2}+b^{2}−c^{2}}{2ab}\right)$，即$sinC=\sqrt[ ]{3}cosC$，$tanC=\sqrt[ ]{3}$，

又$0<C<π$，所以$C=\frac{π}{3}$，所以$▵ABC$的面积为$\frac{1}{2}absin⁡C=\frac{1}{2}×\sqrt[ ]{3}×4×sin\frac{π}{3}=3$，

故*D*正确．

故选：$ACD$．

13.【答案】$−\frac{3}{4}+\frac{5}{4}i$

【解析】【分析】

本题主要考查了复数的四则运算，考查学生的计算能力，属于基础题．
根据题意可将$\frac{2+z}{i−z}=1+2i$化简为$z=\frac{i−4}{2+2i}$，再利用复数的四则运算即可得．

【解答】
解：$∵\frac{2+z}{i−z}=1+2i$，
$∴z=\frac{i−4}{2+2i}=\frac{(i−4)(2−2i)}{(2+2i)(2−2i)}=\frac{−6+10i}{8}=−\frac{3}{4}+\frac{5}{4}i$，
故答案为$−\frac{3}{4}+\frac{5}{4}i$．

14.【答案】$−\frac{17}{18}$

【解析】【分析】
本题考查了二倍角公式及和差化积公式的应用，解题的关键是二倍角公式的灵活运用，对$3cos2α=sin\left(\frac{π}{4}−α\right)$利用二倍角公式及和差化积进行变形即可；
【解答】
解：$3cos2α=3(cos^{2}α−sin^{2}α)=3(cosα+sinα)(cosα−sinα)=sin(\frac{π}{4}−α)=\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}(cosα−sinα)$      所以$cosα+sinα=\frac{\sqrt[ ]{2}}{6}$，平方得$1+sin2α=\frac{1}{18}$，$sin2α=−\frac{17}{18}$．
故答案为$−\frac{17}{18}$．

15.【答案】$7π$

【解析】【分析】

本题考查了正弦定理和二倍角公式及其应用 ，属于中档题．
由正弦定理及二倍角公式可求得角$A$的余弦值，进而求得角$A$的正弦值以及外接圆半径，故可得解．

【解答】

解：在$△ABC$中，由正弦定理得$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}$，则$asinB=bsinA$，

$∵4asinBcos^{2}\frac{A}{2}=bsinA$，$∴cos^{2}\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$，

$∴cosA=2cos^{2}\frac{A}{2}−1=−\frac{1}{2}$，
因为$A\in (0,π)$，

$∴sinA=\sqrt[ ]{1−cos^{2}A}=\sqrt[ ]{1−\left(−\frac{1}{2}\right)^{2}}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，

设$ΔABC$外接圆的半径为$R$，
由正弦定理得$2R=\frac{a}{sinA}=\frac{\sqrt[ ]{21}}{\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}}=2\sqrt[ ]{7}$，$∴R=\sqrt[ ]{7}$，

故$ΔABC$外接圆的面积为$S=πR^{2}=7π$．

故答案为$7π$．

16.【答案】$\frac{4}{3}$

【解析】【分析】

本题考查平面向量基本定理的应用，属于中档题．
根据平面向量基本定理的知识，逐一计算即可．

【解答】
解：如图所示．


$∵M$，$O$，$N$三点共线，$∴$存在实数$λ$使得$\vec{AO}=λ\vec{AN}+(1−λ)\vec{AM}$，

$∵\vec{AB}=\vec{a}$，$\vec{AC}=\vec{b}$，$\vec{AN}=m\vec{a}$，$\vec{AM}=n\vec{b}$，$\vec{AO}=\frac{1}{2}\vec{AD}$．

$∴\frac{1}{2}\vec{AD}=λm\vec{a}+n(1−λ)\vec{b}$，即$\vec{AD}=2λm\vec{a}+2n(1−λ)\vec{b}$．$(∗)$

$∵$点$D$为边$BC$上靠近$B$点的三等分点，

$∴\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{BC}=\vec{AB}+\frac{1}{3}(\vec{AC}−\vec{AB})=\frac{2}{3}\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{AC}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$．

与$(∗)$比较可得：$\left\{\begin{matrix}2λm=\frac{2}{3}\\2n(1−λ)=\frac{1}{3}\end{matrix}\right.$，消去$λ$化为$\frac{2}{m}+\frac{1}{n}=6$．

$∵m$，$n>0$，

$∴m+2n=\frac{1}{6}(\frac{2}{m}+\frac{1}{n})(m+2n)=\frac{1}{6}(4+\frac{m}{n}+\frac{4n}{m})\geq \frac{1}{6}(4+2\sqrt[ ]{\frac{m}{n}⋅\frac{4n}{m}})=\frac{4}{3}$，当且仅当$m=2n=\frac{2}{3}$时取等号．

$∴m+2n$的最小值为$\frac{4}{3}$．

故答案为：$\frac{4}{3}$．

17.【答案】解：$(1)$设$z=x+yi(x,y\in R)$，
则$z+2i=x+(y+2)i$为实数，
$∴y=−2$．
$$∵\frac{z}{2−i}=\frac{x−2i}{2−i}=\frac{(x−2i)(2+i)}{(2−i)(2+i)}$$

$=\frac{2x+2+(x−4)i}{5}=\frac{2x+2}{5}+\frac{x−4}{5}i$为实数，
$∴\frac{x−4}{5}=0$，解得$x=4$．
则$z=4−2i$；
$$(2)∵(z+ai)^{2}=(4−2i+ai)^{2}$$

$=(12+4a−a^{2})+8(a−2)i$，
其在复平面上对应的点在第一象限，
$∴\left\{\begin{matrix}12+4a−a^{2}>0\\8(a−2)>0\end{matrix}\right.$，
解得$2<a<6$．
$∴a$的取值范围为$(2,6)$．

【解析】本题考查了复数代数形式的乘除运算，考查了复数的概念及其几何意义，属于中档题．
$(1)$设$z=x+yi(x,y\in R)$，然后代入$z+2i$结合已知求出$y$的值，再代入$\frac{z}{2−i}$，利用复数代数形式的乘除运算化简结合已知可求出$x$的值，则复数$z$可求；
$(2)$把$z=4−2i$代入$(z+ai)^{2}$化简结合已知条件列出不等式组，求解即可得答案．

18.【答案】解：$(1)$由题意可得$\vec{AE}=\vec{AD}+\vec{DE}=\vec{AD}+\frac{1}{3}\vec{AB}$，
$\vec{AF}=\vec{AB}+\vec{BF}=\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{AD}$，
又$\vec{FG}=2\vec{GE}$，
所以$\vec{AG}−\vec{AF}=2(\vec{AE}−\vec{AG})$，
所以$\vec{AG}=\frac{2}{3}\vec{AE}+\frac{1}{3}\vec{AF}=\frac{2}{3}(\vec{AD}+\frac{1}{3}\vec{AB})+\frac{1}{3}(\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{AD})=\frac{5}{9}\vec{AB}+\frac{7}{9}\vec{AD}$．
$(2)$过点$D$作$AB$的垂线交于点$D′$，如图，

于是在$Rt△ADD′$中，由$∠BAD=45°$，可知，$AD′=3$，
根据题意得$A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(9,3)$，$D(3,3)$，$E(5,3)$，$F(7,1)$，
则$\vec{AG}=\frac{5}{9}\vec{AB}+\frac{7}{9}\vec{AD}=\frac{5}{9}(6,0)+\frac{7}{9}(3,3)=(\frac{17}{3},\frac{7}{3})$，
所以$G(\frac{17}{3},\frac{7}{3})$，
所以$\vec{AB}=(6,0)$，$\vec{AG}=(\frac{17}{3},\frac{7}{3})$，
所以$\vec{GB}=\vec{AB}−\vec{AG}=(\frac{1}{3},−\frac{7}{3})$，$\vec{DF}=(4,−2)$．

【解析】本题主要考查平面向量的线性运算及坐标运算，考查运算求解能力，属于基础题．
$(1)$根据向量的加法及数乘运算求解即可；
$(2)$建立平面直角坐标系，利用平面向量的坐标运算求解即可

19.【答案】解：$(1)f(x)=\vec{m}⋅\vec{n}=2\sqrt[ ]{3}sin \frac{x}{4}cos \frac{x}{4}+2cos^{2}\frac{x}{4}$
$=\sqrt[ ]{3}sin \frac{x}{2}+cos \frac{x}{2}+1=2sin (\frac{x}{2}+\frac{π}{6})+1$，
$∵f\left(x\right)=2$，$∴sin\left(\frac{x}{2}+\frac{π}{6}\right)=\frac{1}{2}$，
$∴cos\left(x+\frac{π}{3}\right)=1−2sin^{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{π}{6}\right)=\frac{1}{2}$；
$(2)∵\left(2a−\sqrt[ ]{3}c\right)cosB=\sqrt[ ]{3}bcosC$，
由正弦定理得$(2sin A−\sqrt[ ]{3}sin C)cos B=\sqrt[ ]{3}sin Bcos C$．
$∴2sinAcosB=\sqrt[ ]{3}sinCcosB+\sqrt[ ]{3}sinBcosC$，
$∴2sinAcosB=\sqrt[ ]{3}\left(sinBcosC+sinCcosB\right)=\sqrt[ ]{3}sin\left(B+C\right)$，
$∵A+B+C=π$，$∴sin\left(B+C\right)=sinA$，且$sinA\ne 0$，
$∴cos B=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，又$0<B<π$，故*B*$=\frac{π}{6}$，
$∴0<A<\frac{5π}{6}$，$∴\frac{π}{6}<\frac{A}{2}+\frac{π}{6}<\frac{7π}{12}$，
$∴\frac{1}{2}<sin\left(\frac{A}{2}+\frac{π}{6}\right)\leq 1$，
又$∵f(x)=\vec{m}⋅\vec{n}=2sin (\frac{x}{2}+\frac{π}{6})+1,$
$∴f\left(A\right)=2sin\left(\frac{A}{2}+\frac{π}{6}\right)+1$，
故$f(A)$的取值范围是$\left(2,3\right]$．

【解析】本题考查向量的数量积，二倍角公式，正弦定理，正弦函数的性质，属于中档题．
$(1)$求出函数的解析式，再利用二倍角公式求解$;$
$(2)$利用正弦定理化简求出$B$，再根据正弦函数的性质求解．

20.【答案】解：$(1)f(x)=4cos \frac{x}{2}sin (\frac{x}{2}+\frac{π}{6})−1$
$$=4cos \frac{x}{2}(\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}sin \frac{x}{2}+\frac{1}{2}cos \frac{x}{2})−1$$

 $=\sqrt[ ]{3}sin x+2cos^{2}\frac{x}{2}−1=\sqrt[ ]{3}sin x+cos x$，

所以 $f\left(x\right)$ 的叠加向量 $\vec{OM}=(\sqrt[ ]{3},1)$ ．

$(2)$由$(1)$得 $f\left(x\right)=\sqrt[ ]{3}sinx+cosx=2sin(x+\frac{π}{6})$ ，

所以 $f(2x+\frac{π}{3})=2sin(2x+\frac{π}{3}+\frac{π}{6})=2sin⁡(2x+\frac{π}{2})=2cos2x$ ．

由题得 $2acos2x+2−cos^{2}x>6cos^{4}x$ ，所以 $2acos2x>6cos^{4}x+cos^{2}x−2$ ，

因为 $x\in \left(−\frac{π}{4},\frac{π}{4}\right)$ ，所以 $2x\in (−\frac{π}{2},\frac{π}{2})$， 所以$cos 2x>0$，

所以 $a>\frac{6cos^{4}x+cos^{2}x−2}{2cos2x}=\frac{(3cos^{2}x+2)(2cos^{2}x−1)}{2cos2x}=\frac{3cos^{2}x+2}{2}$ 对任意 $x\in \left(−\frac{π}{4},\frac{π}{4}\right)$ 恒成立，

所以 $a>\frac{3}{2}cos^{2}x+1$ 对任意 $x\in \left(−\frac{π}{4},\frac{π}{4}\right)$ 恒成立，

设 $g(x)=\frac{3}{2}cos^{2}x+1$ ， $x\in \left(−\frac{π}{4},\frac{π}{4}\right)$ ．

当 $x=0$ 时， $g(x)=\frac{3}{2}cos^{2}x+1$ 取到最大值 $\frac{5}{2}$ ，

所以 $a>\frac{5}{2}$ ．

【解析】本题考查了三角恒等变换的综合应用，考查了平面向量的新定义问题，考查二倍角公式，辅助角公式，函数恒成立问题的求解，含$cosx$的最值问题，属于难题．
$(1)$化简得 $f\left(x\right)=\sqrt[ ]{3}sinx+cosx$ ，即得$f\left(x\right)$的叠加向量$\vec{OM}$ ；

$(2)$求出$f\left(x\right)=2sin(x+\frac{π}{6})$ ，化简得到 $a>\frac{3}{2}cos^{2}x+1$ 对任意 $x\in \left(−\frac{π}{4},\frac{π}{4}\right)$ 恒成立，设 $g(x)=\frac{3}{2}cos^{2}x+1$ ， $x\in \left(−\frac{π}{4},\frac{π}{4}\right)$ ，求出函数 $g(x)$的最大值即得解．

21.【答案】解：$(1)$由$acosC+\sqrt[ ]{3}asinC=b+c$及正弦定理，
得$sinAcosC+\sqrt[ ]{3}sinAsinC=sinB+sinC$，
因为$sinB=sin(A+C)=sinAcosC+cosAsinC$，且$sinC\ne 0$，
所以$\sqrt[ ]{3}sinA=cosA+1$，即$sin(A−\frac{π}{6})=\frac{1}{2}$，
因为$0<A<π$，所以$A=\frac{π}{3};$
$(2)$由余弦定理，得$a^{2}=b^{2}+c^{2}−bc$，
将$c=a+1$代入，整理，得$a=\frac{b^{2}−b+1}{b−2}$，
因为$b>2$，所以$△ABC$的周长为$l=a+b+c=\frac{2b^{2}−2b+2}{b−2}+b+1=3(b−2)+\frac{6}{b−2}+9\geq 6\sqrt[ ]{2}+9$，
当且仅当$3(b−2)=\frac{6}{b−2}$，即$b=2+\sqrt[ ]{2}$时取等号，
所以当$△ABC$的周长最小时，$b=2+\sqrt[ ]{2};$
$(3)$由$△ABC$的面积为$20\sqrt[ ]{3}$，得$\frac{1}{2}bcsinA=20\sqrt[ ]{3}$，
所以$bc=80①$，
又$cosB=\frac{11}{14}$，所以$sinB=\frac{5\sqrt[ ]{3}}{14}$，$sinC=sin(A+B)=\frac{4\sqrt[ ]{3}}{7}$，
由正弦定理，得$a: b: c=sinA:sinB:sinC=7: 5: 8②$，
由$ ① ②$可得$a=7\sqrt[ ]{2,}b=5\sqrt[ ]{2}$，$c=8\sqrt[ ]{2}$，
因为$\vec{BD}=3\vec{DA}$，所以$AD=\frac{c}{4}=2\sqrt[ ]{2}$，
在$△ACD$中，由余弦定理，得$CD^{2}=(5\sqrt[ ]{2})^{2}+(2\sqrt[ ]{2})^{2}−2×5\sqrt[ ]{2}×2\sqrt[ ]{2}cos\frac{π}{3}=38$，
所以$CD=\sqrt[ ]{38}$．

【解析】 本题重点考查正弦定理与余弦定理解三角形，基本不等式的应用，简单的三角变换，考查逻辑推理，转化与化归及运算能力，属稍难题．
$(1)$利用正弦定理，两角和的正弦公式及辅助角公式化简求解即可．
$(2)$利用余弦定理及基本不等式即可，注意取等号时的条件．
$(3)$利用正余弦定理及三角形的面积公式等计算即可求解．

22.【答案】解：$(1)$若选$①$：$acosB+bcosA=2ccosA$，

由正弦定理$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$得： $sin Acos B+sin Bcos A=2sin Ccos A$ ，即 $sin (A+B)=2sin Ccos A$ ，

又因为 $C=π−\left(A+B\right)$ ，则 $sinC=sin\left[π−\left(A+B\right)\right]=sin\left(A+B\right)$ ，

所以 $sinC=2sinCcosA$ ，又 $C\in \left(0,π\right)$ ，则 $sinC>0$ ，

所以 $2cosA=1$，即$cos A=\frac{1}{2}$ ，又 $A\in \left(0,π\right)$ ，所以 $A=\frac{π}{3}$ ，$sinA=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，

因为 $a=3\sqrt[ ]{3}$ ，所以由正弦定理得 $2R=\frac{a}{sinA}=6$ ，故 $R=3$ ．

若选$②$：$\left(sinB−sinC\right)^{2}=sin^{2}A−sinBsinC$

由正弦定理$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$得： $\left(b−c\right)^{2}=a^{2}−bc$ ，化简得： $b^{2}+c^{2}−a^{2}=bc$ ，

由余弦定理得： $cosA=\frac{b^{2}+c^{2}−a^{2}}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$ ，

因为 $A\in \left(0,π\right)$ ，所以 $A=\frac{π}{3}$ ，$sinA=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，

因为 $a=3\sqrt[ ]{3}$ ，所以由正弦定理得 $2R=\frac{a}{sinA}=6$ ，故 $R=3$ ．

若选$③$：$S=\frac{1}{4}b\left(bsinA+atanAcosB\right)$，

因为 $S=\frac{1}{4}b\left(bsinA+atanAcosB\right)=\frac{1}{2}absinC$ ，
则 $bsinA+a\frac{sinAcosB}{cosA}=2asinC$ ，

则 $bsinAcosA+asinAcosB=2acosAsinC$ ，

又由正弦定理$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$得： $sinBsinAcosA+sin^{2}AcosB=2sinAcosAsinC$ ，

又 $A\in \left(0,π\right)$ ， $sinA>0$ ，

所以 $sinBcosA+sinAcosB=2cosAcosC$ ，即 $sin\left(A+B\right)=2cosAsinC$ ，

又因为 $C=π−\left(A+B\right)$ ，则 $sinC=sin\left[π−\left(A+B\right)\right]=sin\left(A+B\right)$ ，

所以 $sinC=2sinCcosA$ ，又 $C\in \left(0,π\right)$ ，则 $sinC>0$ ，

所以 $cosA=\frac{1}{2}$ ，又 $A\in \left(0,π\right)$ ，所以 $A=\frac{π}{3}$ ，$sinA=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，

因为 $a=3\sqrt[ ]{3}$ ，所以由正弦定理得 $2R=\frac{a}{sinA}=6$ ，故 $R=3$ ．

$(2)$由正弦定理得： $\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=\frac{3\sqrt[ ]{3}}{sin\frac{π}{3}}=6$ ，则 $b=6sinB$ ， $c=6sinC$ ，

所以 $b+c=6\left(sinB+sinC\right)$ ，又 $C=π−\left(A+B\right)$ ， $A=\frac{π}{3}$ ，

所以 $sinC=sin\left[π−\left(A+B\right)\right]=sin\left(\frac{π}{3}+B\right)=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}cosB+\frac{1}{2}sinB$ ，

则 $b+c=6\left(\frac{3}{2}sinB+\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}cosB\right)=6\sqrt[ ]{3}\left(\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}sinB+\frac{1}{2}cosB\right)=6\sqrt[ ]{3}sin\left(B+\frac{π}{6}\right)$ ，

$∵$ $▵ABC$ 为锐角三角形，

$∴$ $\left\{\begin{matrix}0<B<\frac{π}{2}\\0<C<\frac{π}{2}\end{matrix}\right.$ ，即 $\left\{\begin{matrix}0<B<\frac{π}{2}\\0<\frac{2π}{3}−B<\frac{π}{2}\end{matrix}\right.$ ，解得： $\frac{π}{6}<B<\frac{π}{2}$ ，

$∴$ $\frac{π}{3}<B+\frac{π}{6}<\frac{2π}{3}$ ，则 $\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}<sin\left(B+\frac{π}{6}\right)\leq 1$ ，

$∴$ $9<6\sqrt[ ]{3}sin\left(B+\frac{π}{6}\right)\leq 6\sqrt[ ]{3}$ ，即 $9<b+c\leq 6\sqrt[ ]{3}$ ，又$a=3\sqrt[ ]{3}$，故 $9+3\sqrt[ ]{3}<a+b+c\leq 9\sqrt[ ]{3}$ ，

所以 $▵ABC$ 周长的取值范围 $\left(9+3\sqrt[ ]{3},9\sqrt[ ]{3}\right]$ ．

【解析】本题考查了正弦定理、余弦定理的应用和利用正弦型函数求值域，考查计算能力，属于较难题．
$(1)$选$①$：根据正弦定理边化角结合诱导公式得到 $sinC=2sinCcosA$ ，进而得到 $cosA=\frac{1}{2}$ ，从而利用正弦定理即可得解；选$②$：利用正弦定理角化边结合余弦定理得到 $cosA=\frac{1}{2}$ ，从而利用正弦定理即可得解；选$③$：根据条件和三角形的面积公式得到 $sinBcosA+sinAcosB=2cosAcosC$ ，通过三角恒等变换和诱导公式得到 $cosA=\frac{1}{2}$ ，从而利用正弦定理即可得解；

$(2)$根据正弦定理得到 $b+c=6\left(sinB+sinC\right)$ ，再利用诱导公式和三角恒等变换得到 $b+c=6\sqrt[ ]{3}sin\left(B+\frac{π}{6}\right)$ ，结合条件得到 $B$ 的取值范围，根据正弦函数的图象与性质即可得到 $b+c$ 的取值范围，从而得解．