2023-2024 年度第二学期期中调研试题

高一数学

考试时间：120 分钟　满分 150 分

一、单选题：本题 8 小题，每题 5 分，共 40 分。

1. 复数$z=i(-1+i)$，其中i为虚数单位，则复数z的虚部是（　　）

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-i$

2. 已知向量$\vec{a}=(1,-1),\vec{b}=(-1,3)$，则$\vec{a}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=$（　　）

A. 2　　B. -8　　C. 8　　D. -2

3. 式子$\sin 25^\circ\cos 35^\circ-\cos 155^\circ\cos 55^\circ=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 设函数$f\left(x\right)=3^x+2x-4$的零点为x_0，则$x_0\in$（　　）

A. $\left(-1,0\right)$　　B. $\left(0,1\right)$　　C. $\left(1,2\right)$　　D. $\left(2,3\right)$

5. 若$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，且$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$，则$\sin\alpha$的值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}+2}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{6}-2}{6}$　　C. $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$　　D. $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$

6. 瑞士数学家莱昂哈德·欧拉于1748年提出了著名的公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，其中e是自然对数的底数，i是虚数单位，该公式被称为欧拉公式，它将指数函数的定义域扩大到复数，建立了三角函数和指数函数的关系，在复变函数论中占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”.根据欧拉公式，$|e^{2i}-1|=$（　　）

A. $\cos 2$　　B. $\sin 2$　　C. $2\cos 1$　　D. $2\sin 1$

7. 在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为a，b，c，若$\dfrac{b-c\cos A}{a-c\cos B}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$，则△ABC 的形状是（　　）

A. 等腰或直角三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等腰三角形

8. 已知四边形$ABCD$中，$AC\perp BD$，$AB=BC=\frac{BD}{2}=2$，$AC=CD=2\sqrt{3}$，点E在四边形$ABCD$的四条边上运动，则$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$的最大值是（　　）

A. 4　　B. 0　　C. -3　　D. -4

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，全部写对的得 6 分，部分选对得部分分。

9. 下列式子中值为$\sqrt{3}$的为（　　）

A. $\tan\frac{2024\pi}{3}$

B. $\sin 15°+\cos 15°$

C. $\frac{1+\tan 15°}{1-\tan 15°}$

D. $\tan 103°-\tan 43°-\sqrt{3}\tan 103°\tan 43°$

10. 设点M是△ABC 所在平面内一点，则下列说法正确的是（　　）

A. 若$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}$，则点$M$、$B$、$C$三点共线

B. 若$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C. 若点M是△ABC 的重心，则$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

D. 若$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$且$x+y=\frac{1}{4}$，则△ABC 的面积是$\triangle MBC$面积的$\frac{4}{3}$

11. 已知锐角△ABC 三个内角 A，B，C的对应边分别为 a，b，c，且$\angle C=\frac{\pi}{3}$，c =2．则下列结论正确的是（　　）

A. $b\cos A+a\cos B=1$

B. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围为$(0,4)$

C. △ABC 的面积最大值为 2

D. $\frac{\cos B}{\cos A}$ 的取值范围为$(0,+\infty)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 复数$1-2i$与复数$3-i$在复平面内对应的点分别为A、B，若O为坐标原点，则$\angle AOB$的大小为____________.

13. 已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$|\vec{a}|=5$，$\vec{b}=(3,4)$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量的坐标为________________.

14. 设$\vec{a}=(\sin x,-\sin x)$，$\vec{b}=(\sin x,m+1)$，若函数$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}+m$在区间$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$上有三个零点，则实数$m$的取值范围为__________________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是同一平面内的三个向量，其中$\vec{a}=(1,-1)$.

(1)若$|\vec{c}|=2\sqrt{2}$，且$\vec{c}//\vec{a}$，求向量$\vec{c}$的坐标；

(2)若$\vec{b}$是单位向量，且$\vec{a}\perp(\vec{a}+2\vec{b})$，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\theta$.

16.（15 分）已知复数$z=bi(b\in R)$，$\frac{z+1}{1-i}$是实数.

(1)求复数z；

(2)若复数$(m-3z)^2-8m$在复平面内所表示的点在第三象限，求实数m的取值范围.

17.（15 分）(1)已知$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

求$\alpha+\beta$的值.

(2) 向量$\vec{m}=\left(2\sin x,\sqrt{3}\right)$, $\vec{n}=(\cos x,\cos 2x)$，已知函数$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}$，△ABC 的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，其中$a=7$，若锐角A满足$f\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，且$\sin B+\sin C=\frac{13\sqrt{3}}{14}$，求$b+c$的值.

18.（17 分）在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，

且 $b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$.

（1）求 A 角的值；

（2）若△ABC 为锐角三角形，利用（1）所求的 A 角值求 $\frac{a-c}{b}$ 的取值范围.

19.（17 分） 若函数 $f\left(x\right)=a\sin x+b\cos x$，则称向量 $\vec{p}=\left(a,b\right)$ 为函数 $f\left(x\right)$ 的特征向量，函数 $f\left(x\right)$ 为向量 $\vec{p}$ 的特征函数.

（1）若函数 $f_1\left(x\right)=\sin\left(\pi-x\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)$，求 $f_1\left(x\right)$ 的特征向量 $\vec{p_1}$；

（2）若向量 $\overrightarrow{p_2}=\left(\sqrt{3},1\right)$ 特征函数为 $f_2\left(x\right)$，求当 $f_2\left(x\right)=\frac{6}{5}$，且 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 时 $\sin x$ 的值；

（3）已知点 $A\left(-3,3\right),B\left(3,11\right)$，设向量 $\overrightarrow{p_3}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的特征函数为 $f_3\left(x\right)$，函数 $h\left(x\right)=4f_3^{\,2}\left(x\right)-2$. 在函数 $h\left(x\right)$ 的图象上是否存在点 Q，使得 $\overrightarrow{AQ}\perp\overrightarrow{BQ}$？如果存在，求出点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由.