**2023~2024学年度第二学期高一数学周末练习6**

一、单选题：本题共**4**小题，每小题**5**分，共**20**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知$zi=1−2i$，则在复平面内，复数$z$对应的点位于(    )

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2.已知两个单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$60^{∘}$，若$2\vec{a}−\vec{b}+\vec{c}=0$，则$|\vec{c}|=$(    )

A. $3$ B. $\sqrt[ ]{7}$ C. $\sqrt[ ]{3}$ D. $1$

3.已知$△ABC$为锐角三角形，$AC=2$，$A=\frac{π}{6}$，则$BC$的取值范围为(    )

A. $(1,+\infty )$ B. $(1,2)$ C. $(1,\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3})$ D. $(\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3},2)$

4.如图，已知圆锥的母线长为$2$，底面半径为$\frac{2}{3}$，一只蚂蚁从$A$点出发，沿圆锥侧面爬行一周返回$A$点，则蚂蚁爬行的最短距离为(    )


A. $1$ B. $\sqrt[ ]{3}$ C. $2\sqrt[ ]{3}$ D. $4$

二、多选题：本题共**2**小题，共**12**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

5.下列说法正确的是(    )

A. 圆柱的所有母线长都相等 B. 棱柱的侧棱都相等，侧面都是平行四边形
C. 直角三角形绕一边所在直线旋转得到的旋转体是圆锥 D. 棱台的侧棱延长后必交于一点

6.$△ABC$的三个内角$A$，$B$，$C$ 所对边的长分别为$a$，$b$，$c$ ，其外接圆半径为$R$，内切圆半径为$r$，$r=3$，满足$acosA+bcosB+ccosC=\frac{R}{3}$，$△ABC$的面积为$6$，则(    )

A. $sin2A+sin2B+sin2C=\frac{1}{3}$ B. $a+b+c=4$
C. $R=6$ D. $sinA+sinB+sinC=\frac{1}{6}$

三、填空题：本题共**2**小题，每小题**5**分，共**10**分。

7.如图，矩形$O′A′B′C′$是水平放置的一个平面图形由斜二测画法得到的直观图，其中$O′A′=4$，$O′C′=1$，则原图形周长是          ．


8.复平面上点$Z(a,b)$对应着复数$z=a+bi$以及向量$\vec{OZ}=(a,b)$，对于复数$z\_{1},z\_{2},z\_{3}$，下列命题都成立；$①z\_{1}+z\_{2}=z\_{2}+z\_{1}$；$②\left|z\_{1}+z\_{2}\right|\leq \left|z\_{1}\right|+\left|z\_{2}\right|$；$③\left|z\_{1}^{2}\right|=\left|z\_{1}\right|^{2}$；$④\left|z\_{1}⋅z\_{2}\right|=\left|z\_{1}\right|⋅\left|z\_{2}\right|$；$⑤$若非零复数$z\_{1},z\_{2},z\_{3}$，满足$z\_{1}z\_{2}=z\_{1}z\_{3}$，则$z\_{2}=z\_{3}.$则对于非零向量$\vec{OZ\_{1}},\vec{OZ\_{2}},\vec{OZ\_{3}}$仍然成立的命题的所有序号是          ．

四、解答题：本题共**4**小题，共**58**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

9.$($本小题$13$分$)$

如图，在直角梯形*ABDC*中，*AB*∥*CD*，*AB*>*CD*，*S*是直角梯形*ABDC*所在平面外一点，

$(1)$画出平面*SBD*和平面*SAC*的交线m．$(2)$求证：AC,BD,m三线共点



10.$($本小题$15$分$)$

已知复数$z$满足方程$z^{2}−2z+2=0$，且复数$z$对应的点$A$在复平面的实轴上方．

$(1)$求$z$；

$(2)$设$z^{2}$，$z−z^{2}$在复平面上的对应点分别为$B$，$C$，求$sin∠ABC$的值．

11.$($本小题$15$分$)$

已知向量$\vec{a}=(sin x,\frac{3}{8})$，$\vec{b}=(cos x,−1)$，

$(1)$当$\overset{\to }{a}⊥\overset{\to }{b}$时，求$sin 2x$的值；

$(2)$当$\vec{a}//\vec{b}$时，求$tan (x+\frac{π}{4})$的值；

$(3)$设函数$f(x)=\vec{a}⋅\vec{b}+\frac{3}{8}$，将$f(x)$的图象向左平移$\frac{π}{6}$个单位得到函数$g(x)$的图象，求$g(x)$在$x\in [0,\frac{π}{6}]$的值域．

12.$($本小题$15$分$)$

在$△ABC$中，$A,B,C$的对边分别为$a,b,c,\left(2c−b\right)cosA=acosB−2acosC$．

$(1)$若$\frac{a}{c}=\frac{cosC}{cosA}$，求$cosB$的值；

$(2)$若$|\vec{AB}|=2,$点$D$在线段$BC$上，且满足$\vec{AD}=λ(\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}+\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|})$，求$\left|\vec{AD}\right|$的取值范围．

**答案和解析**

1.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查复数代数形式的除法运算及其几何意义，是基础题．
利用复数的除法运算化简$z$，再根据复数的几何意义求解即可．

【解答】解：由$zi=1−2i$，得$z=\frac{1−2i}{i}=\frac{(1−2i)(−i)}{(−i)i}=−2−i$，
则$z$在复平面内对应的点的坐标为$(−2,−1)$，位于第三象限．

2.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查向量的数量积的求法以及向量的模的运算法则的应用，是基础题．

【解答】

解：由题意得$\vec{c}=−2\vec{a}+\vec{b}$．
$∵$单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$60^{∘}$，

则$|\vec{c}|=\sqrt[ ]{4\vec{a}^{2}−4\vec{a}⋅\vec{b}+\vec{b}^{2}}=\sqrt[ ]{4−4×1×1×\frac{1}{2}+1}=\sqrt[ ]{3}$．

3.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查正弦定理，正弦函数的值域，属于中档题．

【解答】
解：锐角$△ABC$中，角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，$A=\frac{π}{6}$，
$∴\{\begin{array}{c}0<B<\frac{π}{2}\\0<C<\frac{π}{2}\\B+C=\frac{5π}{6}\end{array}$，得$\frac{π}{3}<B<\frac{π}{2}$
由正弦定理可得$\frac{AC}{sinB}=\frac{BC}{sinA}$，即$\frac{2}{\sin(B)}=\frac{BC}{\sin(\frac{π}{6})}$，得$BC=\frac{1}{sinB}$
$∵sinB\in (\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},1)$，$∴BC\in (1,\frac{2\sqrt[ ]{3}}{3})$

4.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题主要考查了余弦定理和对基本图形的理解，属于基础题
利用圆锥展开图得出蚂蚁爬行的最短距离，结合圆心角公式及余弦定理即可求解．

【解答】

解：由题意可知，圆锥的母线长为$2$，底面半径为 $\frac{2}{3}$ ，

所以圆锥底面周长为 $2πr=2π×\frac{2}{3}=\frac{4}{3}π$ ，

所以圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为 $\left|α\right|=\frac{\frac{4}{3}π}{2}=\frac{2}{3}π$ ，如图所示



在 $▵AOB$ 中， $∠AOB=\frac{2}{3}π,AO=BO=2$ ，

由余弦定理可知， $AB^{2}=AO^{2}+BO^{2}−2AO⋅BO⋅cos∠AOB=2^{2}+2^{2}−2×2×2×\left(−\frac{1}{2}\right)=12$ ，

所以 $AB=2\sqrt[ ]{3}$ ，

所以蚂蚁爬行的最短距离为 $2\sqrt[ ]{3}$ ．

故选：$C$．

5.【答案】$ABD$

【解析】【分析】

本题考查空间几何体的结构特征，属于基础题．
利用圆柱的性质判断选项*A*；利用棱柱的性质判断选项*B*；利用正棱锥的定义判断选项*C*；利用棱台的性质判断选项*D*．

【解答】

解：选项*A*：圆柱的所有母线长都相等$.$判断正确；

选项*B*：棱柱的侧棱都相等，侧面都是平行四边形$.$判断正确；

选项*C*：直角三角形绕一直角边所在直线旋转得到的旋转体是圆锥$.$判断错误；

选项*D*：棱台的侧棱延长后必交于一点$.$判断正确．

故选：$ABD$

6.【答案】$ABC$

【解析】【分析】

本题考查利用正弦定理解三角形，三角形面积公式，是较难题．
$A$选项，对已知条件 $acosA+bcosB+ccosC=\frac{R}{3}$ 结合正弦定理可说明其正确；

$B$选项，通过内切圆半径和面积法推出 $a+b+c=4$ ；

$C$选项，由$A$先等价推出 $sin2A+sin2B+sin2C=4sinAsinBsinC$ ，由三角形的面积公式可算出$R$ ；

$D$选项，根据$R$ 的取值结合 $a+b+c=4$ 和正弦定理可计算．

【解答】

解：如图，设内切圆圆心为 $I$ ，则 $I$ 到三边的距离均为$r=3$ ，

于是 $S\_{▵ABC}=S\_{▵ABI}+S\_{▵BCI}+S\_{▵ACI}$ ，
即 $6=\frac{1}{2}⋅c⋅r+\frac{1}{2}⋅a⋅r+\frac{1}{2}⋅b⋅r$ ，
则 $\frac{3}{2}(a+b+c)=6$ ，得到 $a+b+c=4$ ，$B$选项正确；

由 $acosA+bcosB+ccosC=\frac{R}{3}$ 可得 $\frac{a}{R}cosA+\frac{b}{R}cosB+\frac{c}{R}cosC=\frac{1}{3}$ ，

结合正弦定理可得， $2sinAcosA+2sinBcosB+2sinCcosC=\frac{1}{3}$ ，即 $sin2A+sin2B+sin2C=\frac{1}{3}$ ，$A$选项正确；

根据诱导公式， $sin(A+B)=sin(π−C)=sinC$ ， $sin2(A+B)=sin(2π−2C)=−sin2C$ ，$sin2A+sin2B=sin[(A+B)+(A−B)]+sin[(A+B)−(A−B)]$ ，按照 $A+B,A−B$ 整体展开得到， $sin2A+sin2B=2sin(A+B)cos(A−B)$ ，而 $sin2C=−sin2(A+B)=−2sin(A+B)cos(A+B)$ ，于是
$$sin 2A+sin 2B+sin 2C$$

$$=2sin (A+B)\left[cos (A−B)−cos (A+B)\right]$$

 $=2sin C\left[cos (A−B)−cos (A+B)\right]$
$=4sin Asin Bsin C$ ，
即 $4sinAsinBsinC=\frac{1}{3}$ ，故 $sinAsinBsinC=\frac{1}{12}$ ，由三角形面积公式， $6=S\_{△ABC}=\frac{1}{2}absin C$
$$=\frac{1}{2}(2Rsin A)(2Rsin B)sin C$$

$=2R^{2}sin Asin Bsin C=\frac{R^{2}}{6}$，
 解得$R=6$ ，$C$选项正确；

由正弦定理结合$B$选项，
 $a+b+c=4=2R(sin A+sin B+sin C)$
$=12(sin A+sin B+sin C)$ ，
即 $sinA+sinB+sinC=\frac{1}{3}$ ，$D$选项错误．

故选：$ABC$

7.【答案】$14$

【解析】【分析】

本题考查斜二测画法的规则，属于中档题．
结合题设直观图特征判定平面图特征并求得平面图形的边长，再求周长即可．

【解答】
解：由斜二测画法的规则知平面图为平行四边形且原图形中$OA=BC=O′A′=4$，
设$B′C′$与$O′y′$交于点$D′$，

由$O′C′=1$，$∠x′O′y′=45°$，$O′C′⊥O′A′$，
得原图中$OD=2×\sqrt[ ]{1^{2}+1^{2}}=2\sqrt[ ]{2}$，
则$AB=OC=\sqrt[ ]{OD^{2}+CD^{2}}=\sqrt[ ]{8+1}=3$，
则原图形的周长是$2×(4+3)=14$．
故答案为$14$．

8.【答案】$①②③$

【解析】【分析】

本题主要考查复数有关命题，平面向量的运算，属于基础题．
结合复数给定的命题，转化为平面向量相关的命题，利用平面向量的运算证明即可．

【解答】

解：$①\vec{OZ\_{1}}+\vec{OZ\_{2}}=\vec{OZ\_{2}}+\vec{OZ\_{1}}$成立，故$①$正确；
$②$由向量的三角不等式可知，$\left|\vec{OZ\_{1}}+\vec{OZ\_{2}}\right|⩽\left|\vec{OZ\_{1}}\right|+\left|\vec{OZ\_{2}}\right|$成立，故$②$正确；
$③$由$\vec{OZ\_{1}}^{2}=\left|\vec{OZ\_{1}}\right|^{2}$，可得$\left|\vec{OZ\_{1}}^{2}\right|=\left|\vec{OZ\_{1}}\right|^{2}$，故$③$正确；
$④$记$\vec{OZ\_{1}},\vec{OZ\_{2}}$的夹角为$θ$，
所以$\left|\vec{OZ\_{1}}·\vec{OZ\_{2}}\right|=\left|\left|\vec{OZ\_{1}}\right|·\left|\vec{OZ\_{2}}\right|·cosθ\right|⩽\left|\vec{OZ\_{1}}\right|·\left|\vec{OZ\_{2}}\right|$，故$④$错误；

$ ⑤$对于非零向量$\vec{OZ\_{1}},\vec{OZ\_{2}},\vec{OZ\_{3}}$，若$\vec{OZ\_{1}}·\vec{OZ\_{2}}=\vec{OZ\_{1}}·\vec{OZ\_{3}}$，
所以$\vec{OZ\_{1}}·\left(\vec{OZ\_{2}}−\vec{OZ\_{3}}\right)=0$，即$\vec{OZ\_{1}}⊥\left(\vec{OZ\_{2}}−\vec{OZ\_{3}}\right)或\vec{OZ\_{2}}=\vec{OZ\_{3}}$，故$⑤$不成立．

9.【答案】解　显然，点*S*是平面*SBD*和平面*SAC*的一个公共点，即点*S*在平面*SBD*和平面*SAC*的交线上．

由于*AB*>*CD*，则分别延长*AC*和*BD*交于点*E*，

如图所示，



∵*E*∈*AC*，*AC*⊂平面*SAC*，

∴*E*∈平面*SAC*.

同理，可证*E*∈平面*SBD*.

∴点*E*在平面*SBD*和平面*SAC*的交线上，则连接*SE*，直线*SE*就是平面*SBD*和平面*SAC*的交线．

10.【答案】解：$(1)$因为复数$z$对应的点在复平面的实轴上方，
所以可设$z=a+bi(a,b\in R,b>0)$．
又复数$z$满足$z^{2}−2z+2=0$，故$(a+bi)^{2}−2(a+bi)+2=0$，
即$a^{2}−b^{2}−2a+2+2b(a−1)i=0$，
根据复数相等的定义，$\left\{\begin{matrix}a^{2}−b^{2}−2a+2=0,\\2b(a−1)=0.\end{matrix}\right.$
又注意到$b>0$，解得$\left\{\begin{matrix}a=1\\b=1\end{matrix}\right.$，即$z=1+i$．
$(2)$由$(1)$知，$z=1+i$，$z^{2}=2i$，$z−z^{2}=1−i$，
则点$A(1,1)$，$B(0,2)$，$C(1,−1)$，
则$\vec{BA}=(1,−1)$，$\vec{BC}=(1,−3)$，
因此，$cos∠ABC=\frac{\vec{BA}⋅\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|}=\frac{1×1+(−1)×(−3)}{\sqrt[ ]{1^{2}+1^{2}}\sqrt[ ]{(−1)^{2}+(−3)^{2}}}=\frac{2\sqrt[ ]{5}}{5}$．
又因为$∠ABC\in (0,π)$，
所以$sin∠ABC=\sqrt[ ]{1−cos^{2}∠ABC}=\sqrt[ ]{1−(\frac{2\sqrt[ ]{5}}{5})^{2}}=\frac{\sqrt[ ]{5}}{5}$．

【解析】本题考查的是复数的概念、复数相等的充要条件、复数的几何意义等知识点，属于中档题．
$(1)$由题意设$z=a+bi(a,b\in R,b>0)$，由复数$z$满足$z^{2}−2z+2=0$，即可得出答案；
$(2)$由$(1)$知，点$A(1,1)$，$B(0,2)$，$C(1,−1)$，则$cos∠ABC=\frac{\vec{BA}⋅\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|}$和$sin∠ABC=\sqrt[ ]{1−cos^{2}∠ABC}$即可得出答案．

11.【答案】解：$(1)$因为$\overset{\to }{a}⊥\overset{\to }{b}$，所以$cos xsin x−\frac{3}{8}=0$，即$\frac{1}{2}sin 2x−\frac{3}{8}=0$，

所以$sin 2x=\frac{3}{4}$．

$(2)$因为$\vec{a}//\vec{b}$，所以$\frac{3}{8}cos x+sin x=0$，所以$tan x=−\frac{3}{8}$，

所以$tan (x+\frac{π}{4})=\frac{1+tan x}{1−tan x}=\frac{5}{11}$．

$(3)$因为$f(x)=\vec{a}⋅\vec{b}+\frac{3}{8}=sin xcos x=\frac{1}{2}sin 2x$，
所以$g(x)=\frac{1}{2}sin (2x+\frac{π}{3})$，

因为$x\in [0,\frac{π}{6}]$，所以$2x+\frac{π}{3}\in [\frac{π}{3},\frac{2π}{3}]$，

所以$\frac{\sqrt[ ]{3}}{4}⩽g(x)⩽\frac{1}{2}$．

【解析】本题主要考查平面向量的数量积和三角函数的应用，熟悉平面向量的数量积和三角函数的图象与性质是解答本题的关键，属于中档题．

$(1)$由题意$\overset{\to }{a}⊥\overset{\to }{b}$，所以$cos xsin x−\frac{3}{8}=0$，直接运用二倍角公式即可求解；

$(2)$因为$\vec{a}//\vec{b}$，所以$\frac{3}{8}cos x+sin x=0$，求出$tanx$，再由两角和的正切公式求解．
$(3)$可先求出$g(x)=\frac{1}{2}sin (2x+\frac{π}{3})$，结合$x$的范围，可求值域．

12.【答案】解：由正弦定理可得：$(2sinC−sinB)cosA=sinAcosB−2sinAcosC$，
$∴2sinCcosA+2cosCsinA=sinAcosB+cosAsinB$，
$∴2sin(A+C)=sin(A+B)$，
$∴2sinB=sinC$，$∴2b=c$；
$(1)∵\frac{a}{c}=\frac{sin A}{sin C}=\frac{cosC}{cosA}$，
$∴sinAcosA=sinCcosC$，
$∴sin2A=sin2C$，
$∴2A=2C$或$2A+2C=π$，即$A=C$或$A+C=\frac{π}{2}$，
$∴△ABC$是等腰三角形或者直角三角形，
$∵2b=c$，$∴∠B$不可能是直角，$∴a=c=2b$．
$∴cosB=\frac{a^{2}+c^{2}−b^{2}}{2ac}=\frac{7}{8}$．
$(2)∵|\vec{AB}|=2,$即$c=2$，$∴b=\frac{c}{2}=1$．
$∵\vec{AD}=λ(\frac{\vec{AC}}{\left|\vec{AC}\right|}+\frac{\vec{AB}}{\left|\vec{AB}\right|})$，$∴AD$是$∠A$的角平分线，
设$AD$长度为$x$，设$∠BAC=2θ$，
$∵S\_{△ABC}=\frac{1}{2}×1×2×sin2θ=\frac{1}{2}×x×2×sinθ+\frac{1}{2}×1×x×sinθ$，
$∴sin2θ=\frac{3}{2}xsinθ$，
$∴2sinθcosθ=\frac{3}{2}xsinθ$，
$∵θ\in (0,\frac{π}{2})$，$∴sinθ\ne 0$，
$∴x=\frac{4}{3}cosθ$，
$∵θ\in (0,\frac{π}{2})$，$∴cosθ\in (0,1)$，
$∴x\in (0,\frac{4}{3})$，即$\left|\vec{AD}\right|$的取值范围为$(0,\frac{4}{3}).$

【解析】本题考查正弦定理，余弦定理，三角形面积公式的运用，属于中档题．
$(1)$由正弦定理化简可得$2b=c$，$a=c=2b$，再利用余弦定理得到$cosB=\frac{a^{2}+c^{2}−b^{2}}{2ac}=\frac{7}{8}$；
$(2)\vec{AD}=λ(\frac{\vec{AC}}{\left|\vec{AC}\right|}+\frac{\vec{AB}}{\left|\vec{AB}\right|})$，得到$AD$是$∠A$的角平分线，进而得到$x=\frac{4}{3}cosθ$，结合$θ\in (0,\frac{π}{2})$，即可求解．