2023-2024 学年度第二学期高一数学周练 4

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知$\overrightarrow{AB}=(3,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(2,k)$，若$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，则$k=($　$)$

A. $\frac{3}{2}$　　　　B. $-\frac{3}{2}$　　　　C. $\frac{2}{3}$　　　　D. $-\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】【分析】

本题考查向量平行的判断与证明、平面向量的坐标运算的应用，属于基础题．

利用向量共线的坐标表示列方程求参数k即可．

【解答】

解：因为$\overrightarrow{AB}=(3,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(2,k)$，

若$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，则 $3k-2\times(-1)=0$，可得$k=-\frac{2}{3}$.

故选：D.

2. 在锐角三角形ABC中，角A，B所对的边长分别为a，b，若$2a\sin B=\sqrt{3}b$，则角A等于

(　)

A. $\frac{\pi}{12}$　　　　B. $\frac{\pi}{6}$　　　　C. $\frac{\pi}{4}$　　　　D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】D

【解析】【分析】

本题考查利用正弦定理解三角形，属于基础题．

把正弦定理变形代入已知条件求解即可．

【解答】

解：$2a\sin B=\sqrt{3}b$，

由正弦定理得，$2sinAsinB=\sqrt{3}sinB$，

因为三角形ABC中，$sinB\neq 0$，

所以$sinA=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又因为A为锐角，所以$A=\frac{\pi}{3}$.

故选 D.

3. 在平行四边形$ABCD$中，对角线AC与BD交于点O，$\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AE}$，则$\overrightarrow{BE}=$.（　）

A. $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　　C. $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　　D. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

【答案】A

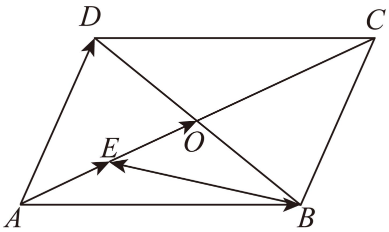
【解析】【分析】

本题考查了向量的加减与数乘混合运算，属于基础题.

根据向量的线性运算直接计算，即可得解.

【解答】

解：



由已知对角线 AC 与 BD 交于点 O ， $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AE}$ ，

则 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ ，

所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ ，

故选：A.

4. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，则 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$的值是 (　)

A. $\frac{7}{8}$　　B. $-\frac{7}{8}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $-\frac{1}{8}$

【答案】B

【解析】【分析】

本题考查诱导公式、二倍角公式，属于基础题.

由题意得 $2\alpha-\frac{\pi}{6}=2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}$，根据诱导公式、二倍角的余弦公式，化简计算，即可得答案.

【解答】

解：由题意得 $2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$,

所以 $2\alpha-\frac{\pi}{6}=2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}$

所以 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\left(1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1 = 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-1 =-\frac{7}{8}$

故选 B.

5. 已知菱形$ABCD$的边长为 2，$\angle A = 60°$，点P是BC中点，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD} =$(　)

A. 0　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 3　　　　D. $\frac{9}{2}$

【答案】C

【解析】【分析】

本题考查向量的数量积，属于基础题.

利用数量积的运算性质即可求解.

【解答】

解：由题意，得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD} = \left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD}\right) = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}^2 =-\frac{1}{4}\times 2^2+2^2 = 3$.

故选：C.

6. 函数$f(x) = 4^x-(x+1)^2$的零点个数为

(　)

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】C

【解析】【分析】

本题考查的是函数零点的个数判定问题．在解答的过程当中充分体现了数形结合的思想以及问题转化的思想．属于基础题.

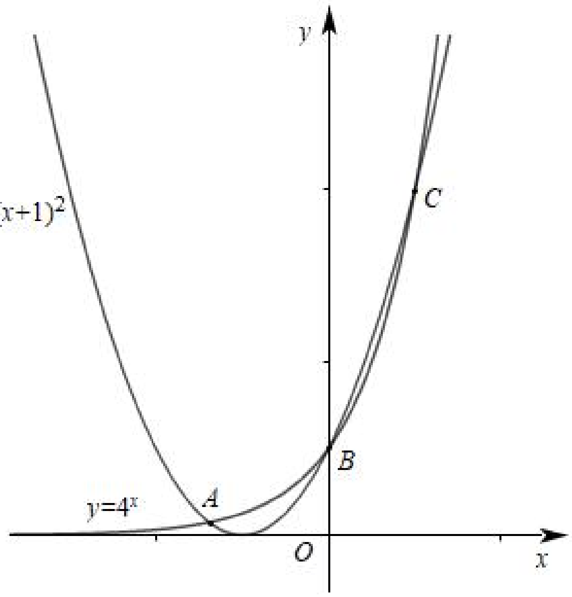
求$f(x)$零点个数即求$y = 4^x$与$y = (x+1)^2$图象交点的个数，分别作出两函数的图象，即可得答案.

【解答】

解：令$f(x) = 4^x-(x+1)^2 = 0$，可得$4^x = (x+1)^2$，

则原命题即求$y = 4^x$与$y = (x+1)^2$图象交点的个数，

分别作出$y = 4^x$与$y = (x+1)^2$图象，如下所示

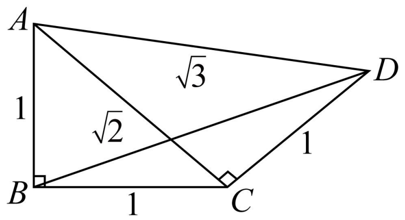


由图象可得，交点为A、B、C三点，

所以函数$f(x) = 4^x - (x+1)^2$的零点个数为3.

故选C.

7. 古希腊数学家特埃特图斯($Theaetetus$，大约公元前417年一公元前369年)通过下图来构造无理数$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \cdots$，记$\angle BAC = \alpha, \angle DAC = \beta$，则$\cos(\alpha + 2\beta) =$(　)



A. $\frac{\sqrt{2}-4}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{2}+4}{6}$

【答案】A

【解析】【分析】

本题考查了两角和的余弦公式，考查了二倍角公式，属于基础题.

利用锐角三角函数求出$\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta$，再利用两角和的余弦公式和二倍角公式计算可得.

【解答】

解：由图可知$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos 2\beta = 2cos^2\beta - 1 = 2(\frac{\sqrt{6}}{3})^2 - 1 = \frac{1}{3}$，

$\cos(\alpha + 2\beta) = \cos\alpha\cos 2\beta - \sin\alpha\sin 2\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}-4}{6}$.

故选：A.

8. 已知向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$不共线，对任意$t\in R$，恒有$|\vec{a}-t\vec{b}|\geq|\vec{a}-2\vec{b}|$，则

(　)

A. $\vec{a}\perp\vec{b}$　　B. $\vec{a}\perp(\vec{a}-2\vec{b})$

C. $\vec{b}\perp(\vec{a}-2\vec{b})$　　D. $(\vec{a}+2\vec{b})\perp(\vec{a}-2\vec{b})$

【答案】C

【解析】【分析】

本题考查向量的数量积与向量的垂直关系，考查运算能力，属于一般题.

两边平方得到$\vec{b}^2t^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot t-4\vec{b}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}\geq0$，$\varDelta\leq0$得到$\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=0$，$\vec{b}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$，得到答案.

【解答】

解：$|\vec{a}-t\vec{b}|\geq|\vec{a}-2\vec{b}|$，则$(\vec{a}-t\vec{b})^2\geq(\vec{a}-2\vec{b})^2$，整理得到$\vec{b}^2t^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot t-4\vec{b}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}\geq0$，

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{b}^2>0$，故$\varDelta=(-2\vec{a}\cdot\vec{b})^2-4\vec{b}^2(-4\vec{b}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b})\leq0$，即$(2\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}^2)^2\leq0$，

故$\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=0$，即$\vec{b}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$，向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$不共线，故$\vec{b}\perp(\vec{a}-2\vec{b})$.

故选：C

二、多选题：本题共 3 小题，每小题6 分，共 18 分. 每小题给出的四个选项中，不止一项是符合题目要求的. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. $\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，则下列说法正确的是(　)

A. 若$A>B$，则$\sin A>\sin B$

B. 若$\triangle ABC$为钝角三角形，则$a^2+b^2>c^2$

C. 若$A=30°, b=4, a=3$，则$\triangle ABC$有两解

D. 若三角形ABC为斜三角形，则$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

【答案】ACD

【解析】【分析】

本题考查正弦定理、余弦定理的应用，考查转化思想和数形结合思想，考查逻辑推理能力和运算能力，属于一般题.

由正弦定理可判断A，由余弦定理可判断B，由$b\sin A<a<b$可判断C，由两角和的正切公式可判断D.

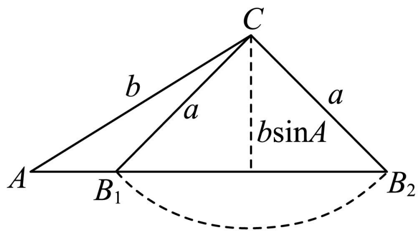
【解答】

解：对于A，若 $A>B$，则 $a>b$，由正弦定理可得 $2R\sin A>2R\sin B$（R为$\triangle ABC$外接圆半径），所以，$\sin A>\sin B$，A 正确；

对于B，若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，假设C 为钝角，

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，可得 $a^2+b^2<c^2$，B 错误；

对于C，$b\sin A=4\sin 30^\circ=2$，则 $b\sin A<a<b$，如图：



所以 $\triangle ABC$ 有两解，C 正确；

对于D，因为 $\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$，

所以 $\tan B+\tan C=\tan(B+C)(1-\tan B\tan C)$

因为 $\tan(B+C)=\tan(\pi-A)=-\tan A$，

所以 $\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C-\tan A$，

所以 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$，$D$ 正确.

故选：ACD

10. 下列说法中正确的是（　）

A. 向量$\overrightarrow{e_1}=(2,-3)$，$\overrightarrow{e_2}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$不能构成平面内所有向量的一个基底

B. 非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，满足$|\vec{a}|>|\vec{b}|$且$\vec{a}$与$\vec{b}$同向，则$\vec{a}>\vec{b}$

C. $\triangle ABC$的外心O满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{2}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则$\triangle ABC$为等腰三角形

D. 设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}-\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$

【答案】AC

【解析】【分析】

本题考查了基底的定义、平面向量线性运算及性质，利用向量的数量积求向量的模，属于中档题.

由题可得$\overrightarrow{e_1}//\overrightarrow{e_2}$，可以判断$A$，向量不能比大小，可以判断$B$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{2}\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Rightarrow(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2=(-\sqrt{2}\overrightarrow{OC})^2$，求得$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，同理求得$\angle AOC=\frac{3\pi}{4}$，$\angle COB=\frac{3\pi}{4}$，结合圆的性质，可以判断$C$，$|\vec{a}-\vec{b}|=4\Rightarrow(\vec{a}-\vec{b})^2=16\Rightarrow\vec{a}^2+\vec{b}^2=18$，进而表示出$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}$，计算即可得解.

【解答】

解：A：因为 $\frac{2}{-3}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}}$，所以 $\overrightarrow{e_1}//\overrightarrow{e_2}$，

因此这两个平面向量不能构成平面内所有向量的一个基底，所以本选项说法正确；

B：因为两个向量不能比较大小，所以本选项说法不正确；

C：设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为r，

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}\Rightarrow(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2=(-\sqrt{2}\overrightarrow{OC})^2\Rightarrow r^2+r^2+2r^2\cdot\cos\angle AOB=2r^2$

$\Rightarrow\cos\angle AOB=0\Rightarrow\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，

由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}\Rightarrow(\overrightarrow{OA}+\sqrt{2}\overrightarrow{OC})^2=(-\overrightarrow{OB})^2\Rightarrow r^2+2r^2+2\sqrt{2}\cdot r^2\cdot\cos\angle AOC=r^2$

$\Rightarrow\cos\angle AOC=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle AOC=\frac{3\pi}{4}$，同理：$\angle COB=\frac{3\pi}{4}$，

由圆的性质可知：$BC=AC$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，因此本选项说法正确；

D：$|\vec{a}-\vec{b}|=4\Rightarrow(\vec{a}-\vec{b})^2=16\Rightarrow\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=16\Rightarrow\vec{a}^2+\vec{b}^2=18$，

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{18+2}=2\sqrt{5}$，所以本选项不正确，

故选：AC

11. 已知：函数$f(x)=\begin{cases}x^2,0\leq x\leq 1\\|\ln(x-1)|,x>1\end{cases}$，若直线$y=m$与函数$y=f(x)$的图象有三个交点$A(x_1,m)$，$B(x_2,m)$，$C(x_3,m)$，且$x_1<x_2<x_3$，则下列命题中正确的是（ ）

A. 函数$f(x)$有两个零点 0 和 2

B. $x_2x_3=x_2+x_3$

C. 方程$[f(x)]^2-5f(x)+6=0$ 有 6 个不同的根

D. 当$k=2$ 时，方程$f(x)=kx-1$ 有两个不相等的实根

【答案】ABD

【解析】【分析】

本题考查函数零点、方程的根的个数，是中档题.

令 $f(x)=0$，求出函数的零点可判断A；作出函数 $f(x)$ 的大致图象，由图结合题意可得 $0<x_1\leq 1<x_2<2<x_3$，即有 $f(x_2)=f(x_3)\Rightarrow-\ln(x_2-1)=\ln(x_3-1)$，结合对数运算化简即可判断$B$；方程根的问题转化为图象交点的问题，结合图形可判断C，D.

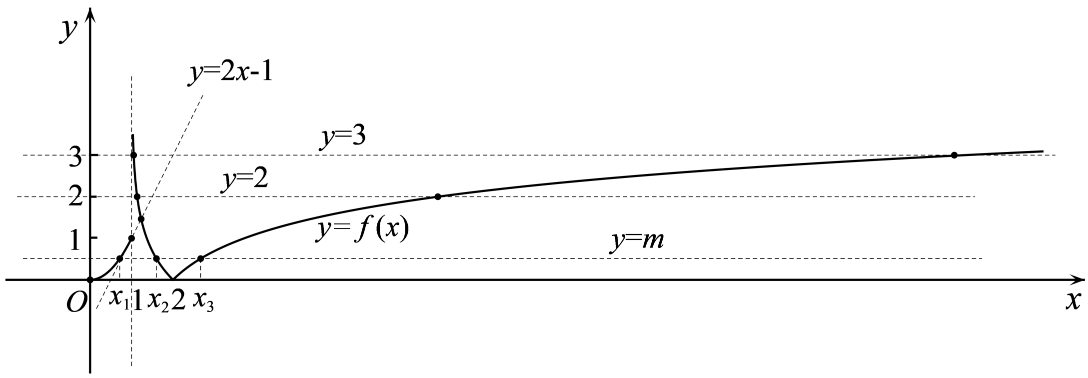
【解答】

解：由题意，令 $f(x)=0$，

当 $0\leq x\leq 1$ 时，$x^2=0$，解得$x=0$；当$x>1$ 时，$|\ln(x-1)|=0$，解得$x=2$，

则函数 $f(x)$ 有两个零点 0 和 2，故 A 正确；

作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如图，



由图结合题意可知， $0<x_1\leq 1<x_2<2<x_3$ ，

由 $f(x_2)=f(x_3)\Rightarrow -\ln(x_2-1)=\ln(x_3-1)$ ，可得 $(x_2-1)(x_3-1)=1$ ，即 $x_2x_3=x_2+x_3$ ，故 B 正确；

由 $[f(x)]^2-5f(x)+6=0$ 可得 $f(x)=2$ 或 $f(x)=3$ ，

由图可知，函数 $y=f(x)$ 的图象与直线$y=2$ 及$y=3$ 共有 4 个交点，则方程 $[f(x)]^2-5f(x)+6=0$ 有 4 个不同的根，故 C 错误；

当$k=2$ 时，

当 $0\leq x\leq 1$ 时，令 $f(x)-2x+1=0$ ，解得$x=1$ ，

且由图象可得当$x>1$ 时， $y=f(x)$ 与 $y=2x-1$ 只有一个交点.

综上，直线 $y=2x-1$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有两个交点，则方程 $f(x)=kx-1$ 有两个不相等的实根，故 D 正确.

故选：ABD.

三、填空题.（本题共 3 小题，每小题5 分，共 15 分. 请把答案直接填写在答题卡相应位置上.）

12. 已知i是虚数单位，则复数$z=(1+i)(2-i)$的虚部是______.

【答案】1

【解析】【分析】

本题考查复数的乘法的运算法则以及复数的基本概念的应用，属于基础题.

利用复数的乘法的运算法则，化简求解即可.

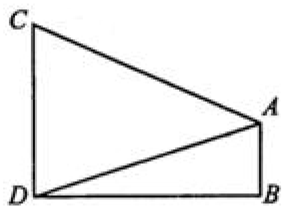
【解答】

解：复数$z=(1+i)(2-i)=3+i$，

所以复数$z=(1+i)(2-i)$的虚部是 1.

故答案为：1.

13. 如图，两座相距 $60m$的建筑物AB、CD的高度分别为 $20m$、$50m$，BD为水平面，则从建筑物AB的顶端A看建筑物CD的张角$\angle CAD$的大小是______.



【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】【分析】

此题主要考查余弦定理在解三角形实际问题中的应用，属于综合性试题，有一定的计算量，属于中档题目.

分别求解出$\triangle ACD$的每条边，再根据余弦定理求角的公式求解$\angle CAD$即可.

【解答】

解：由图知直角三角形ABD中$AB=20m$，$BD=60m$，

由勾股定理得$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=20\sqrt{10}m$，

同理$AC=\sqrt{(CD-AB)^2+BD^2}=30\sqrt{5}m$，

在$\triangle ACD$中，由余弦定理知：

$\cos\angle CAD=\frac{(30\sqrt{5})^2+(20\sqrt{10})^2-50^2}{2\times30\sqrt{5}\times20\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

得$\angle CAD=\frac{\pi}{4}$.

故答案为$\frac{\pi}{4}$.

14. 已知$\triangle ABC$，若存在$\triangle A_1B_1C_1$，满足$\frac{\cos A}{\sin A_1}=\frac{\cos B}{\sin B_1}=\frac{\cos C}{\sin C_1}=1$，则称$\triangle A_1B_1C_1$是$\triangle ABC$的一个“友好”三角形.

(i)在满足下述条件的三角形中，存在“友好”三角形的是______：(请写出符合要求的条件的序号)

①$A=90^\circ, B=60^\circ, C=30^\circ$； ②$A=75^\circ, B=60^\circ, C=45^\circ$；③$A=75^\circ, B=75^\circ, C=30^\circ$.

(ii)若等腰$\triangle ABC$存在“友好”三角形，则其顶角的度数为______.

【答案】②；45°

【解析】【分析】

本题考查三角函数的新定义问题，三角恒等变换的综合应用，属于中档题.

由题意，由正弦函数和余弦函数的转化公式可得，最后注意三角形的内角和为180°.

【解答】

解：(i)根据题意可得，$\cos A=\sin A_1,\cos B=\sin B_1,\cos C=\sin C_1$,

由于三角形内角的正弦值均为正数，所以 $\cos A,\cos B,\cos C$,均为正数，

所以角A，B，C均为锐角，即$\triangle ABC$为锐角三角形.故①不存在“友好”三角形.

若$\triangle A_1B_1C_1$为锐角三角形，

则有$\cos A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A_1$，

$\cos B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B_1$，

$\cos C=\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\sin C_1$，

所以$\frac{\pi}{2}-A=A_1$，$\frac{\pi}{2}-B=B_1$，$\frac{\pi}{2}-C=C_1$，

三式相加得，$\frac{3\pi}{2}-(A+B+C)=A_1+B_1+C_1$，等式不成立，

而$\triangle A_1B_1C_1$显然不能是直角三角形，

因此$\triangle A_1B_1C_1$只能为钝角三角形，

对于③中，若存在“友好”三角形，则$A_1=B_1=15^{\circ}$，$C_1=120^{\circ}$，三角和不等于180°，故③不存在“友好”三角形.

对于②，存在，

如$A_1=15^{\circ},B_1=30^{\circ},C_1=135^{\circ}$满足题意；

(ii)若等腰$\triangle ABC$存在“友好”三角形，假设$A=B$，

由以上的分析可知，C_1为钝角，

所以$A_1=B_1=90°-A$，$C_1=90°+C$，

相加得，$270°-2A+C=180°$，又 $2A+C=180^{\circ}$，

故$C=45°$.即顶角的度数为 $45°$.

故答案为：②；$45°$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题 13 分)

在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为角A，B，C的对边，$\vec{m}=(2b+c,\cos C)$，$\vec{n}=(-a,\cos A)$，且$\vec{m}//\vec{n}$，$a=2\sqrt{3}$.

(1)求A角大小;

(2)D为BC边上一点，$AD=1$，且__，求$\triangle ABC$的面积.

(从①AD为$\angle BAC$的平分线，②D为BC的中点，这两个条件中任选一个补充在上面的横线上并作答.如果都选，以选①计分.)

【答案】解：(1) $\because \overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}, \therefore (2b+c)\cos A=-a\cos C$，

由正弦定理 $(2\sin B+\sin C)\cos A=-\sin A\cos C$，

$2\sin B\cos A+\sin C\cos A+\sin A\cos C=0$，

$2\sin B\cos A+\sin(A+C)=0$，

$2\sin B\cos A+\sin B=0$，

$\sin B(2\cos A+1)=0$，

$\because \sin B\neq 0$，

$\therefore \cos A=-\frac{1}{2}$， $\because A\in(0,\pi), \therefore A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)选①:

由AD平分$\angle BAC$得：$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，

$\frac{1}{2}bc\sin 120^{\circ}=\frac{1}{2}\times 1\times c\sin 60^{\circ}+\frac{1}{2}\times 1\times b\sin 60^{\circ}$，所以$bc=b+c$， ①,

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 120^{\circ}, a=2\sqrt{3}$，

所以$b^2+c^2+bc=12$， ②,

①②联立得$\begin{cases} bc=b+c \\ b^2+c^2+bc=12 \end{cases}$，

解得$(bc)^2-bc-12=0$，解得$bc=4$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin 120^{\circ}=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

选②: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)$，

即 $1=\frac{1}{4}(c^2+2bc\cos 120^{\circ}+b^2)$，得$b^2+c^2-bc=4$③,

$\triangle ABC$中，由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 120^{\circ}, a=2\sqrt{3}$，

所以$b^2+c^2+bc=12$， ④,

由③④即可得$bc=4$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin 120^{\circ}=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

【解析】本题考查了正弦定理、余弦定理和三角形面积公式，属于中档题.

(1)由$\overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$，得$(2b+c)\cos A=-a\cos C$，由正弦定理 $(2\sin B+\sin C)\cos A=-\sin A\cos C$，整理化简得 $\cos A=-\frac{1}{2}$可得 A角大小；

(2)选①: 由AD平分$\angle BAC$得$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，化简得$bc=b+c$，在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$b^2+c^2+$

$bc=12$，联立得出bc，可得▵ABC的面积；

选②：由$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，两边同时平方得$b^2+c^2-bc=4$，在▵$ABC$中，由余弦定理得$b^2+c^2+bc=12$，联立得出$bc$，可得▵$ABC$的面积.

16. (本小题 15 分)

已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x-2cos^2x(x\in R)$.

(1)求函数$f(x)$的值域；

(2)在$\triangle ABC$中，角A，B，C 的对边分别为a，b，c ，若$f(A)=-2,a=\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积S 的最大值.

【答案】解：(1)解：$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x-2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$，

$\therefore f(x)$ 的值域为 $[-3,1]$.

(2)解：由(1)知 $f(A)=2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)-1=-2$ ，即 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，

由 $A\in(0,\pi)$ ，得 $-\frac{\pi}{6}<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$

$\therefore 2A-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，即 $A=\frac{2\pi}{3}$，

又由余弦定理得 $3=a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{2\pi}{3}=b^2+c^2+bc\geq 3bc$ ，即 $bc\leq 1$ ，当且仅当$b=c=1$ 时等号成立.

$\therefore\triangle ABC$ 的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore S$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，当且仅当$b=c=1$ 时取得.

【解析】本题考查求正弦型函数的值域，三角形面积公式，涉及余弦定理和基本不等式，属于中档题.

(1)根据辅助角公式以及二倍角公式即可化简 $f(x)$ ，进而可求值域；

(2)根据 $f(A)=-2$ 结合正弦型函数的性质可得 $A=\frac{2\pi}{3}$，进而由余弦定理以及基本不等式和三角形面积公式即可求解.

17. (本小题 15 分)

在$\triangle ABC$中，$\angle ACB$的平分线CM与边AB交于点M，且$AM=CM=1$.

(1)若$A=\frac{\pi}{6}$，求$\triangle ABC$的面积S；

(2)求$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC}+|\overrightarrow{BM}|$的最小值.

【答案】解：(1)在$\triangle AMC$中，$AM=CM=1$，$A=\frac{\pi}{6}$，所以$\angle ACM=\frac{\pi}{6}$，

又CM是$\angle ACB$的平分线，

所以$\angle ACB=2\angle ACM=\frac{\pi}{3}$，$\angle BCM=\frac{\pi}{6}$，

故 $B=\pi-A-\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，

在$Rt\triangle CBM$中，$CM=1$，$\angle BCM=\frac{\pi}{6}$，

故 $BM=\frac{1}{2}$，$BC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times(1+\frac{1}{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$；

(2)设$A=\theta$，则$\angle ACM=\angle BCM=\theta$，$\angle CMB=2\theta$，$B=\pi-3\theta$，

所以$\begin{cases}0<\theta<\pi\\0<2\theta<\pi\\0<\pi-3\theta<\pi\end{cases}$，解得 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$，

在$\triangle CBM$中，根据正弦定理，得$\frac{BM}{\sin\angle BCM}=\frac{CM}{\sin B}$，

得$BM=CM\cdot\frac{\sin\angle BCM}{\sin B}=\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC}+|\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{MC}|\cos\angle CMB+|\overrightarrow{BM}|$

$$=\cos2\theta+\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}=\cos2\theta+\frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos2\theta+\cos\theta\sin2\theta}$$

$$=\cos2\theta+\frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos2\theta+2\sin\theta\cos^2\theta}$$

$$=\cos2\theta+\frac{1}{\cos2\theta+2\cos^2\theta}=\cos2\theta+\frac{1}{2\cos2\theta+1}$$

$$=\frac{2\cos2\theta+1}{2}+\frac{1}{2\cos2\theta+1}-\frac{1}{2}$$

$$\geq2\sqrt{\frac{2\cos2\theta+1}{2}\cdot\frac{1}{2\cos2\theta+1}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}，$$

当且仅当$\frac{2\cos2\theta+1}{2}=\frac{1}{2\cos2\theta+1}$，即$\cos\theta=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$时取等号，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC}+|\overrightarrow{BM}|$的最小值为$\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

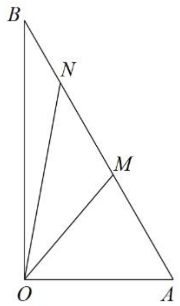
【解析】本题考查三角形面积、正弦定理的应用、向量的数量积，利用基本不等式求最值，三角恒等变换的应用，属于中档题.

(1)利用已知求得$B=\frac{\pi}{2}$，再利用面积公式直接求解即可.

(2)设$A=\theta$，先利用正弦定理得$BM=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$，再利用向量的数量积可得$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC}+|\overrightarrow{BM}|=\frac{2\cos 2\theta+1}{2}+\frac{1}{2\cos 2\theta+1}-\frac{1}{2}$，最后利用基本不等式可得最值.

18.(本小题17分)

如图所示，某镇有一块空地$\triangle OAB$，其中$OA=3km$，$OB=3\sqrt{3}km$，$\angle AOB=90^{\circ}$.当地镇政府规划将这块空地改造成一个旅游景点，拟在中间挖一个人工湖ΔOMN，其中M、N都在边AB上，且$\angle MON=30^{\circ}$，挖出的泥土堆放在ΔOAM地带上形成假山，剩下的ΔOBN地带开设儿童游乐场.为安全起见，需在ΔOAN的一周安装防护网.



(1)当$AM=\frac{3}{2}km$时，求OM长度；

(2)若要求挖人工湖用地ΔOMN的面积是堆假山用地$\triangle OAM$的面积的$\sqrt{3}$倍，试确定$\angle AOM$的大小；

(3)为节省投入资金，人工湖ΔOMN的面积要尽可能小，问如何设计施工方案，可使ΔOMN的面积最小？最小面积是多少？

【答案】解：(1)在$Rt\triangle OAB$中，$\tan\angle OAB=\sqrt{3}$，$\therefore\angle OAB=60^{\circ}$，

在$\triangle AOM$中，$OA=3$，$AM=\frac{3}{2}$，$\angle OAM=\angle OAB=60^{\circ}$，

由余弦定理得$OM=\sqrt{OA^2+AM^2-2OA\cdot AM\cdot\cos\angle OAM}$

$=\sqrt{9+\frac{9}{4}-2\times 3\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

(2)设$\angle AOM=\theta(0^{\circ}<\theta<60^{\circ})$，$\because S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}S_{\triangle OAM}$，

$\therefore\frac{1}{2}ON\cdot OM\sin 30^{\circ}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}OA\cdot OM\sin\theta$，即$ON=6\sqrt{3}\sin\theta$，

在$\triangle OAN$中，由正弦定理得，$\frac{ON}{\sin A}=\frac{OA}{\sin\angle ONA}$，

即$\frac{6\sqrt{3}\sin\theta}{\sin 60^{\circ}}=\frac{3}{\sin(\theta+30^{\circ}+60^{\circ})}$，即 $6\sqrt{3}\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{2\cos\theta}$，即 $\sin 2\theta=\frac{1}{2}$，

由$0^{\circ}<2\theta<120^{\circ}$，得 $2\theta=30^{\circ}$，$\therefore\theta=15^{\circ}$，即$\angle AOM=15^{\circ}$；

(3)设$\angle AOM=\theta(0^{\circ}<\theta<60^{\circ})$，由(2)知$ON=\frac{3\sqrt{3}}{2\cos\theta}$，

又在$\angle AOM$中，由$\frac{OM}{\sin 60^\circ}=\frac{OA}{\sin(\theta+60^\circ)}$，得$OM=\frac{3\sqrt{3}}{2\sin(\theta+60^\circ)}$，

$\therefore S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}OM\cdot ON\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\sin(\theta+60^\circ)}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\cos\theta}\cdot\frac{1}{2}=\frac{27}{8\sin(2\theta+60^\circ)+4\sqrt{3}}$，

$\therefore$当且仅当$2\theta+60^\circ=90^\circ$，即$\theta=15\quad{}^\circ$时，

$\triangle OMN$的面积取最小值为$\frac{27(2-\sqrt{3})}{4}\mathrm{km}^2$．

【解析】本题考查利用数学知识解决三角形问题，考查余弦定理、正弦定理的运用，考查学生分析解决问题的能力，属于较难题．

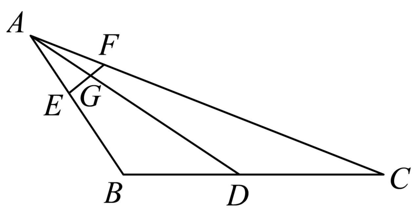
(1)先求出$\angle OAM$，再在$\triangle AOM$中，利用余弦定理即可求出OM；

(2)设$\angle AOM=\theta$，根据$S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}S_{\triangle OAM}$和三角形面积公式可得$ON=6\sqrt{3}\sin\theta$，在$\triangle OAN$中，由正弦定理可求$sin2\theta$，从而可求出$\angle AOM$的大小；

(3)设$\angle AOM=\theta(0^\circ<\theta<60^\circ)$，由(2)知$ON=\frac{3\sqrt{3}}{2\cos\theta}$，在$\angle AOM$中，由正弦定理表示出$OM$，根据$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}OM\cdot ON\cdot\sin\angle MON$表示出$\triangle OMN$面积关于$\theta$的函数，化简根据三角函数最值即可求出其最小值．

19. (本小题 17 分)

如图，设ΔABC中角A、B、C所对的边分别为a、b、c，AD为BC边上的中线，已知$b=c+3$，$\sin A\cdot(a^2+b^2-c^2)=8ab\sin C-2ab\cos A\sin C$，$\cos\angle BAD=\frac{\sqrt{21}}{7}$.



(1)求边b、c的长度；

(2)求ΔABC的面积；

(3)点G为AD上一点，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，过点$G$的直线与边$AB$、$AC$(不含端点)分别交于$E$、$F$.若$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{5}{6}$，求$\frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}$的值．

【答案】解：(1)因为$\sin A\cdot(a^2+b^2-c^2)=8ab\sin C-2ab\cos A\sin C$，

所以，$\sin A\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=4\sin C-\cos A\sin C$，即$\sin A\cos C+\cos A\sin C=4\sin C$，

所以，$\sin(A+C)=4\sin C$，即$\sin B=4\sin C$，即$b=4c$．

又因为$b=c+3$，所以$c=1$，$b=4c=4$．

(2)设$\angle BAC=\theta$，因为AD为BC边上的中线，

所以，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=2\cos\theta+\frac{1}{2}$，

$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AD}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{1+16+8\cos\theta}=\frac{\sqrt{17+8\cos\theta}}{2}$，

$\cos\angle BAD=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{4\cos\theta+1}{\sqrt{17+8\cos\theta}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，①

整理得 $28cos^2\theta+8\cos\theta-11=0$，即$(2\cos\theta-1)(14\cos\theta+11)=0$，

得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$或 $\cos\theta=-\frac{11}{14}$，

由①，得 $4\cos\theta+1>0$，所以，$\cos\theta>-\frac{1}{4}$，则 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，

故 $\sin\theta=\sqrt{1-cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因此，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\times1\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

(3)由(2)知，$\cos\theta=\frac{1}{2}$，D为BC的中点，则$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}=6\overrightarrow{AG}$.

设$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$，其中$\lambda$、$\mu\in(0,1)$.

所以$\frac{\overrightarrow{AE}}{\lambda}+\frac{\overrightarrow{AF}}{\mu}=6\overrightarrow{AG}$，得$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AE}}{6\lambda}+\frac{\overrightarrow{AF}}{6\mu}$.

又E、G、F三点共线，则$\overrightarrow{EG}$、$\overrightarrow{EF}$共线，

设$\overrightarrow{EG}=k\overrightarrow{EF}(k\in R)$，则$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AE}=k\left(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\right)$，所以，$\overrightarrow{AG}=(1-k)\overrightarrow{AE}+k\overrightarrow{AF}$，

因为$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{AF}$不共线，则$\frac{1}{6\lambda}+\frac{1}{6\mu}=(1-k)+k=1$，即$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=6$，

由$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，得$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，

又$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC})\cdot(\mu\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB})=\frac{5}{6}$，

即$\frac{1}{6}\left[\mu\overrightarrow{AC}^2+(\mu-\lambda)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}^2\right]=\frac{5}{6}$，

又因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta=1\times4\times\frac{1}{2}=2$，

所以，$16\mu+2(\mu-\lambda)-\lambda=18\mu-3\lambda=5$，所以，$\begin{cases}\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=6\\18\mu-3\lambda=5\end{cases}$，解得$\lambda=\mu=\frac{1}{3}$,

所以：$AE=\frac{1}{3}AB$，$AF=\frac{1}{3}AC$，

所以$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\times AE\times AF\times\sin\angle BAC}{\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\angle BAC}=\frac{AE}{AB}\times\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

【解析】本题考查了正余弦定理，向量加法的平行四边形法则，向量数乘的几何意义，三点共线的充要条件，向量的数量积和数乘运算，共线向量基本定理，三角形的面积公式，考查了计算能力，属于较难题.

(1)利用余弦定理结合正弦定理化简得出$b=4c$，再结合$b=c+3$ 可求得边b、c的长度；

(2)设$\angle BAC=\theta$，由题意可得$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，利用平面向量数量积的运算性质结合 $\cos\angle BAD=\frac{\sqrt{21}}{7}$可得出关于 $\cos\theta$的等式，解出 $\cos\theta$的值，进而可得出 $\sin\theta$的值，利用三角形的面积公式可求得$\triangle ABC$的面积；

(3)设$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$，其中$\lambda$、$\mu\in(0,1)$，根据$E$、$F$、$G$三点共线可得出$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=6$，再利用平面向量数量积的运算性质结合$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{5}{6}$可得出 $18\mu-3\lambda=5$，然后利用三角形的面积公式可求得$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}$的值..