多项选择题的常见命题形式及新的赋分规则下答题策略研究

2024.03

江苏省仪征中学　邓迎春

在新课程改革的大背景下，九省联考数学试卷再次发生了大量的变化.

在多选题方面，主要有以下两个变化：

（1）题量上，由之前的4题变为3题；

（2）给分方式上，由之前的每题满分5分，部分选对得2分变为每题满分6分，部分选对得部分分.

思考 1、多选题有哪些命题形式？

2、新的赋分规则下答多选题有哪些策略？

论点说明

后续观点来源有：

1、课程标准

2、任子朝、赵轩、罗增儒等专家相关论文

3、中国高考评价体系、中国高考评价体系说明

4、历年高考试卷

5、高考试题分析（教育部教育考试院编）

C 目录

CONTENTS

一、从多选题改革发展看命题意图

很多人误以为高考数学多选题是在2020年全国新高考数学Ⅰ卷和Ⅱ卷中首次引入的.其实,早在1997年起,高考数学就把填空题作为题型改革的试验田,进行了多选题的试验.当时的多选题给出4至5个备选项,但以填空题的形式出现,学生只有全部选对所有正确选项,而且没有选错的选项才能得分,对学生的能力要求比较高.

（1997 年全国卷 19）已知 m,l 是直线，α、β 是平面，给出下列命题：

①若 l 垂直于 α 内的两条相交直线，则 $l\perp\alpha$；

②若 l 平行于 α，则 l 平行于 α 内的所有直线；

③若 $m\subset\alpha$，$l\subset\beta$，且 $l\perp m$，则 $\alpha\perp\beta$；

④若 $l\subset\beta$，且 $l\perp\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$；

⑤若 $m\subset\alpha$，$l\subset\beta$，且 $\alpha\parallel\beta$，则 $m\parallel l$.

其中正确的命题的序号是_______ (注:把你认为正确的命题的序号都填上)

（1998 年全国卷 19）关于函数 $f(x)=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})(x\in R)$，有下列命题:

①由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是π的整数倍；

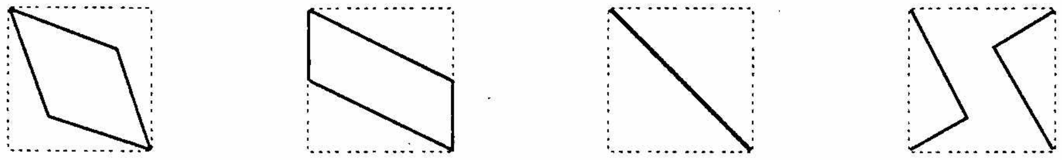
②$y=f(x)$的表达式可改写为 $y=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})$；

③$y=f(x)$的图像关于点$(-\frac{\pi}{6}，0)$对称；

④$y=f(x)$的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称.

其中正确的命题的序号是________．(注：把你认为正确的命题的序号都填上．)

（2000 年全国卷 18）如图，E、F 分别为正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是________．**(要求：把可能的图的序号都填上)**



①　②　③　④

高考中的多选题命题第一阶段：

以填空题呈现，四到五个选项，全选对得满分，少选或者选错得零分，难度较大！

时间	选择题题量	时间	选择题题量
1951-1982	无	1990-1991	15单，3分（45/120）
1983	5单，2分（10/120）	1992	18单，3分（45/120）
1984	5单，3分（不选、选错-1分15/120）	1993	17单，4分（68/150）
1985	5单，3分（15/120）	1994-1998	10单4，5单5（65/150）
1986	10单，3分（30/120）	1999	10单4，4单5（60/150）
1987	8单，3分（24/120）	2000至今全国卷	12单5（60/150）
1988	15单，3分（45/120）	2020新高考	8单4多，5分，漏选3分（60/150）
1989	12单，3分（36/120）	2021至今新高考	8单4多，5分，漏选2分（60/150）

高考中的多选题命题第二阶段：

2020 至今，四题，每题 5 分，部分选对 3 分→2 分

9. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$，则（　　）

A. 函数 $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 为偶函数

B. 曲线 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=k\pi,k\in Z$

C. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增

D. $f(x)$ 的最小值为 -2

10. 已知复数 z,w 均不为 0，则（　　）

A. $z^2=|z|^2$

B. $\frac{z}{\overline{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}$

C. $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$

D. $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，若 $f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$，则（　　）

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

C. 函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 是偶函数

D. 函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是减函数

高考中的多选题命题第三阶段：

九省联考，3 题，每题 6 分，部分选对得部分分

一、从多选题改革发展看命题意图

总结：多选题改革意图

1.引入多选题的改革意图：为数学基础和数学能力不同层次的考生提供发挥空间,从而更好地发挥数学科考试的选拔功能.

2.2021 年部分选对改为 2 分的改革意图:2020 年高考数学多选题将单选题的两档区分,细化为三档区分,发挥精确甄别考生的功能.但教师和学生有求稳心态,虽然多选题有多个正确选项,但部分考生只选一个,害怕选了错误选项而得零分.为激励考生选出全部正确选项,命题人将 2021 年高考数学多选题的部分正确选项得分由过去的 3 分降低到了 2 分.

3.2024 年多选题改革意图

题量减少：让学生有充足答题时间　　给分方式改变：鼓励选出全部选项

二、从多选题题型特征看解题策略

二、从多选题题型特征看解题策略

如果说选择题的解法有别于其他题型，首先需要研究选择题相比其他题型而言，有哪些特殊之处？总的来说，选择题有三个特征：

选择题是有选项的。

选择题是会让我们看见“正确答案”的。

选择题是不需要解题过程的。

因此：在观察选项、获取信息的基础上，特殊化、排除法、估值法是解决多选题的重要手段。

2.1 充分观察选项（审题）是根本

（2023 新高考I卷 9）已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图像关于点 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$ 中心对称，则（　　）

A. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减

B. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$ 有两个极值点

C. 直线 $x=\frac{7\pi}{6}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

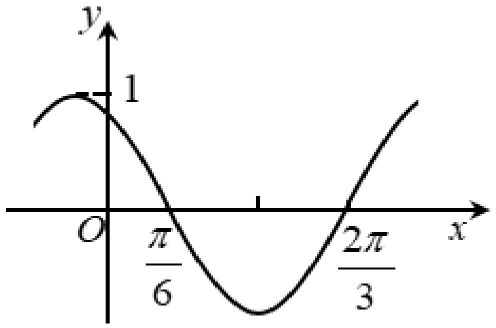
D. 直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

各选项之间为并列关系，解题时先易后难

2.1 充分观察选项（审题）是根本

（2020 新高考I卷 10）下图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图像，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$ （　　）

A. $\sin(x+\frac{\pi}{3})$　　B. $\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$　　C. $\cos(2x+\frac{\pi}{6})$　　D. $\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$



选项间存在等价、互斥关系！

2.1 充分观察选项（审题）是根本

(2024 九省联考 T11）已知函数 $f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，若 $f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$，则（　　）

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$　　C. 函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$是偶函数　　D. 函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是减函数

C 选项对本题解题思路的提醒至关重要！选项与选项之间存在一定的逻辑关系。

2.1 充分观察选项（审题）是根本

（2023 新高考I卷 12）下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（　　）

A. 直径为0.99m 的球体

B. 所有棱长均为1.4m 的四面体

C. 底面直径为0.01m， 高为1.8m 的圆柱体

D. 底面直径为1.2m， 高为0.01m 的圆柱体

本题中，确定 AB 的正确性相对简单，CD 较难，考虑 C 中直径相对过小，因此可以视为长度为 1.8m 的线段，超过体对角线，C 排除。D 中高也相对过小，可以用类似的方法将其视为直径为 1.2m 的圆面，而正方体内正六边形截面内切圆半径好求，从而确定 D 的正确性.

选项间方法存在逻辑关系。

2.2 特殊化：代值、举例

（2023 新高考I卷 11）已知函数 $f(x)$ 的定义域为$\mathbf{R}$， $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则（　　）.

A. $f(0)=0$　　B. $f(1)=0$

C. $f(x)$是偶函数　　D. $x=0$为$f(x)$的极小值点

举出特例 $f(x)=0$

2.3 排除法：正难则反

（2023 新高考I卷 9）已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图像关于点 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$ 中心对称，则（　　）

A. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减

B. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$ 有两个极值点

C. 直线 $x=\frac{7\pi}{6}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

易得 A 正确，BC 错误，而对于 D，直接解决难度相对较大.

而对于多选题而言，在排除 BC 的前提下，已经可以锁定正确选项为 AD 了.

2.4 估值法：极限思想

（2023 新高考I卷 12）下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（　　）

A. 直径为0.99m 的球体

B. 所有棱长均为1.4m 的四面体

C. 底面直径为0.01m， 高为1.8m 的圆柱体

D. 底面直径为1.2m， 高为0.01m 的圆柱体

在多选题中，有时会遇到难以计算的情况，此时，极限运算、估值运算是我们常用的方法。

(2024 苏北七市二模 T11）已知函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，$f(x)$的图像关于点（2,0）对称，$g(0)=g(2)=1, g(x+y)+g(x-y)=g(x)f(y),$，则（　　）

A. $f(x)$为偶函数　　B. $g(x)$为偶函数　　C. $g(-1-x)=-g(-1+x)$　　D. $g(1-x)=g(1+x)$

赋值得 A 正确，B 错误，对于 C,D，直接解决难度相对较大，

充分观察选项：考虑到 C,D 的等价性，对于多选题而言，在排除 B 的前提下，就可以确定正确答案为：ACD.

特殊化：$g(x)=\sin\frac{\pi}{4}x+\cos\frac{\pi}{4}x$

二、从多选题题型特征看解题策略

总结：从以上解题分析来看，解多选题，应抓住多选题解题和一般性解题之间的“不变”与“变”.

从“不变”的角度，解决任何问题，都应在充分审题的基础上，读懂题意，选择合理的解题方法，制定合理的解题方案。多选题也不例外。

从“变”的角度，第一，因为多选题是包含“选项”的，所以完整的审题不仅要审题干，也要审选项，选项中可能包含了一定的信息（并列、等价或互斥、逻辑关系等），可能指明了解题的方向；第二，因为选项中是包含“答案”的，所以借助于特值（例）验证，数形结合等方法，来辅助理解题意，也可合理运用“排除法”，正难则反；还可以进行估值和极限计算。

三、从多选题命题形式看教学导向

3.1 知识覆盖面统计

试卷	多选第1题	多选第2题	多选第3题	多选第4题
2020新高考1卷	解析几何基本量	三角函数图象	基本不等式	概率分布
2020新高考2卷	统计图	1卷第1题	1卷第2题	1卷第3题
2021八省联考	函数性质	复数性质	立体几何展开图	三角函数性质
2021新高考1卷	统计特征值	三角与向量	直线与圆	立几与向量
2021新高考2卷	统计特征值	立体几何	直线与圆	函数创新
2022新高考1卷	立体几何	函数性质	直线与抛物线	抽象函数
2022新高考2卷	三角函数性质	直线与抛物线	立体几何体积	基本不等式
2023四省联考	函数性质	立体几何推导	三角函数定义	立几与三角
2023新高考1卷	统计特征值	对数运算情境	抽象函数	立体几何创新
2023新高考2卷	立体几何	直线与抛物线	函数极值	概率
2024九省联考	三角函数性质	复数性质	抽象函数	

3.1 小结

多选题在知识点覆盖上涵盖高中预备知识、函数、代数与几何、统计概率、数学模型全部主线知识.

特殊的，立体几何的考查以综合法为主.

3.2 多选题命题形式分类

（1）从本原性问题（情境）出发，考查知识的系统性

（2）从开放性问题（情境）出发，考查知识的联系性

（3）从创新性问题（情境）出发，考查知识的应用性

3.2.1 从本原性问题（情境）出发，考查知识的系统性

(2023 新高考 1 卷 T9）有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$， 其中 x_1 是最小值， x_6 是最大值，则（　　）

A. x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数

B. x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数

C. x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不小于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差

D. x_2,x_3,x_4,x_5 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的极差

(2022 新高考 1 卷 T10）已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则（　　）

A. $f(x)$ 有两个极值点

B. $f(x)$ 有三个零点

C. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

D. 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

(2020 新高考 1 卷 T9）已知曲线 $C: mx^2+ny^2=1$.（　　）

A. 若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

B. 若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为 $\sqrt{n}$

C. 若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

D. 若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

3.2.1 从本原性问题（情境）出发，考查知识的系统性

题中的本原性问题：

1、如何研究一组数据？（特征量）

2、如何研究函数？（以性作图、依图识性）

3、如何研究曲线与方程？（数形统一）

小结：从本原性问题出发命制多选题，可以克服知识碎片化、割裂化的现象，突出数学主干知识，体现知识的系统性，从而考查学生是否具有良好的认知结构。往往四个选项考查四个基本概念，对应问题的四个维度，难度较低，题号靠前.

3.2.2 从开放性问题（情境）出发，考查知识的联系性

(2020新高考1卷T11)已知$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，则（　　）

A. $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$

B. $2^{a-b}>\frac{1}{2}$

C. $\log_2 a+\log_2 b\geq -2$

D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}$

(2021新高考1卷T10)已知O为坐标原点，点$P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，则（　　）

A. $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$

B. $|\overrightarrow{AP_1}|=|\overrightarrow{AP_2}|$

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$

D. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

(2024九省联考卷T10）已知复数z,w均不为0，则（　　）

A. $z^2=|z|^2$

B. $\frac{z}{\overline{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}$

C. $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$

D. $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$

3.2.2 从开放性问题（情境）出发，考查知识的联系性

题中的开放性问题：

1、已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，你能得到哪些不等关系？

2、已知O为坐标原点，点$P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，你能得到哪些等量关系？

3、复数有哪些运算性质？

小结：从开放性问题出发命制多选题，可以克服思维固化、僵化的现象，体现知识的联系性，从而考查学生是否具有良好的思维发散能力。往往涉及至少两个章节知识的交融，如

第 1 题涉及单调性、基本不等式、对数运算

第 2 题涉及向量运算、三角运算

第 3 题涉及复数运算与向量运算的辨析、复数的三角形式

一般难度居中，题号居中.

3.2.3 从创新性问题（情境）出发，考查知识的应用性

(2023 新高考 1 卷 T12）下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（　　）

A. 直径为0.99m 的球体

B. 所有棱长均为1.4m 的四面体

C. 底面直径为0.01m，高为1.8m 的圆柱体

D. 底面直径为1.2m，高为0.01m 的圆柱体

(2024 九省联考 T11）已知函数 $f(x)$ 的定义域为$\mathbf{R}$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，若 $f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$，则（　　）

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

C. 函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 是偶函数

D. 函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是减函数

(2020 新高考 1 卷 T12）信息熵是信息论中 一个重要概念.设随机变量 X 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,n$，且 $P(X=i)=p_i>0(i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，定义 X 的信息熵 $H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$.（　　）

A. 若 n=1，则 $H(X)$=0

B. 若 n=2，则 $H(X)$随着 p_1 的增大而增大

C. 若 $p_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $H(X)$随着 n 的增大而增大

D. 若 n=2m，随机变量 Y 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,m$，且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}(j=1,2,\cdots,m)$，则 $H(X)\le H(Y)$

3.2.3 从创新性问题（情境）出发，考查知识的应用性

题中的创新性问题:

1、以实际生活情境为创新背景，考查解决实际问题的能力;

2、以抽象函数为背景，用数学内部知识的创新和发展考查创新性应用能力;

3、以科学概念为创新背景，考查数学在其他学科中的应用能力.

小结：从创新性问题（情境）出发命制多选题，可以克服思维套路化、机械刷题的现象，体现知识的应用性，从而综合考查学生的数学语言、数学逻辑、数学模型素养。

一般难度较大，题号靠后.

三、从多选题命题形式看教学导向

总结：好的课堂需要

以高质量的本原性问题、开放性问题、创新性问题为平台；

以深化对问题本质的认识作为课堂教学的目标；

以学生自己努力发现和提出问题、分析和解决问题作为课堂教学的重要构成；

以“师生互动”作为课堂教学的基本方式，

进而帮助学生形成系统的知识体系、发散的思维模式，

最终在知识的运用中提升学生的数学核心素养

案例分析：多元变量最值与范围问题

多元变量最值与范围问题

引例：

- 2020年全国2卷理科17

ΔABC中，$\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=\sin B\sin C$.

（1）求A.

（2）若$BC=3$，求ΔABC周长的最大值.

ΔABC中，$\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=\sin B\sin C$.

(1) 求$A.(A=\dfrac{2\pi}{3})$

(2) 若$BC=3$,求ΔABC周长的最大值.

- 思考：1、已知条件是什么？
- 2、未知目标是什么？
- 3、条件充分吗？多余吗？

- 问题提炼：

ΔABC中，$a=3, A=\dfrac{2\pi}{3}$.求$b+c$的最大值.

- **核心问题：**如何研究二元变量的最值问题呢？

ΔABC中，$a=3, A=\dfrac{2\pi}{3}$.求$b+c$的最大值.

- 问题1：三角形定吗？加什么条件就定？

- 思考：加的条件可以是边也可以是角，谁做变量比较合适？

- 策略1：边化角，化二元为一元，利用函数研究最值

ΔABC中，$a=3, A=\frac{2\pi}{3}$.求$b+c$的最大值.

- 策略1：边化角，化二元为一元，利用函数研究最值

解：ΔABC中，由正弦定理，

$$b+c=\frac{a}{\sin A}\sin B+\frac{a}{\sin A}\sin C=2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}-B)$$

$$=2\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{3})$$

$\therefore B=\frac{\pi}{6}$时，$(b+c)_{\max}=2\sqrt{3}$

- 问题抽象为：

已知：$b>0, c>0$，且 $b^2+c^2+bc=9$，求 $b+c$ 的最大值.

思考：还能用函数解决吗？

- 策略1'：三角换元，化二元为一元，利用函数研究最值

已知：$b>0, c>0$，且$b^2+c^2+bc=9$，求$b+c$的最大值.

• 策略1'：三角换元，化二元为一元，利用函数研究最值

解：$b^2+c^2+bc=(b+\frac{1}{2}c)^2+\frac{3}{4}c^2=9$，设$b+\frac{1}{2}c=3\cos\theta$，

$\frac{\sqrt{3}}{2}c=3\sin\theta$，$\therefore b+c=3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sqrt{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$时，$(b+c)_{\max}=2\sqrt{3}$.

- 问题抽象为：

已知：$b>0,c>0,$且$b^2+c^2+bc=9,$求$b+c$的最大值.

- 问题2：还有其他方法吗？
- 能“退”成更简单的问题吗？

已知：$b>0,c>0,$且$b^2+c^2+bc=9,$求bc的最大值.

- 问题抽象为：

已知：$b>0, c>0$，且$b^2+c^2+bc=9$，求bc的最大值.

解：记$bc=t$，则$b^2+c^2=9-t$，

由基本不等式，$b^2+c^2\geq 2bc, \therefore 9-t\geq 2t$

解得，$t\leq 3$，当且仅当$b=c=\sqrt{3}$时取等号，

$\therefore (bc)_{\max}=3.$

- 策略2：向和、积形式转化，利用基本不等式构建不等关系。

已知：$b>0,c>0$,且$b^2+c^2+bc=9$,求$b+c$的最大值.

- 策略2：向和、积形式转化，利用基本不等式构建不等关系。

解：记$b+c=t$,则$b^2+c^2+bc=t^2-bc=9$,所以$bc=t^2-9$

由基本不等式，$b+c\geq 2\sqrt{bc},\therefore t\geq 2\sqrt{t^2-9}$

解得，$t\leq 2\sqrt{3}$,当且仅当$b=c=\sqrt{3}$时取等号，

$\therefore (b+c)_{\max}=2\sqrt{3}.$

已知：$b>0, c>0$，且$b^2+c^2+bc=9$，求$b+c$的最大值.

问题3：前面从函数、不等式的角度研究，你还能找到更多的角度思考吗？

- 思考：1、$b+c$能取1吗？如何判断？

  2、如何推广到一般？

- 策略3：记$b+c=t$，转化为方程组有解问题

已知：$b>0,c>0$,且$b^2+c^2+bc=9$,求$b+c$的最大值.

- **策略3：记$b+c=t$，转化为方程组有解问题**

解：记$b+c=t$,则方程组$\begin{cases} b^2+c^2+bc=9, \\ b+c=t. \end{cases}$有解,

消b整理得：$c^2-tc+t^2-9=0$

从而$\Delta=t^2-4(t^2-9)\geq 0$

解得，$t\leq 2\sqrt{3}$,当且仅当$b=c=\sqrt{3}$时取等号,

$\therefore (b+c)_{\max}=2\sqrt{3}.$

已知：$b>0, c>0$，且 $b^2+c^2+bc=9$，求 $b+c$ 的最大值.

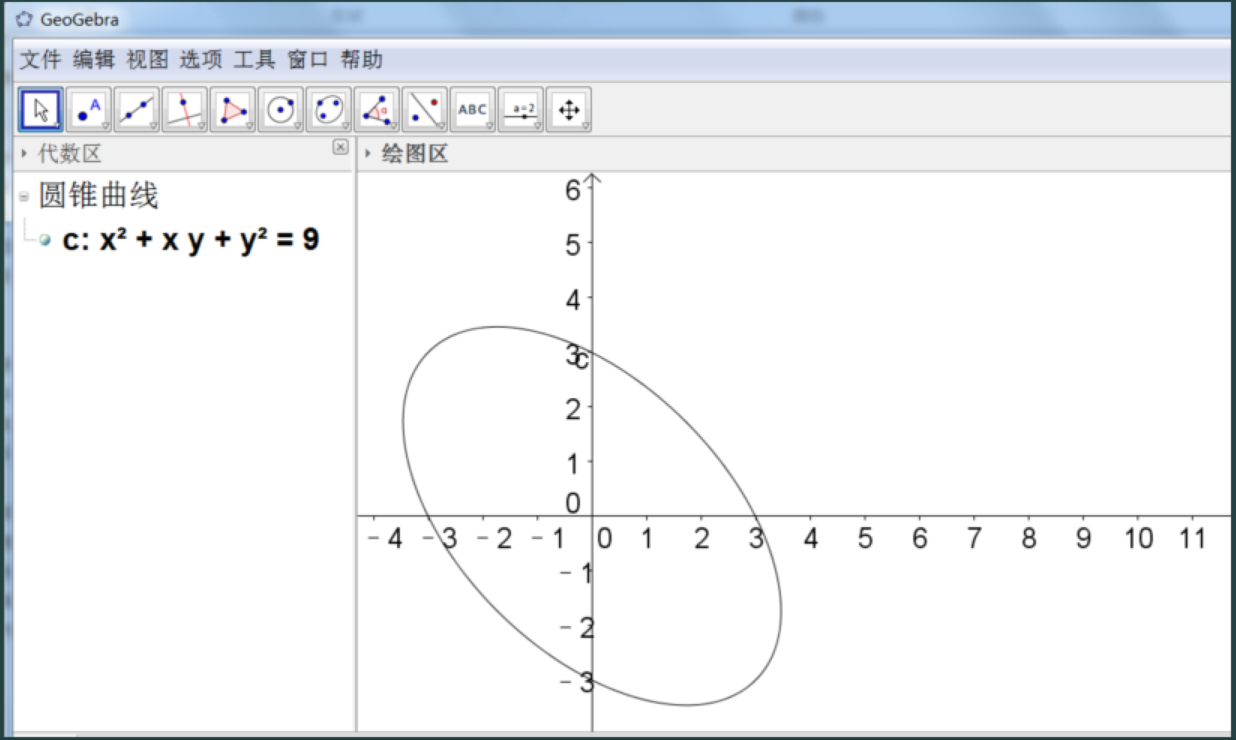
问题4： 前面从函数、不等式、方程这些数的角度研究，你还能找到更多的角度思考吗？

- 思考：前面方程组求解的几何意义是什么？

- 策略4：记 $b+c=t$，转化为轨迹有交点问题

已知：$b>0, c>0$，且$b^2+c^2+bc=9$，求$b+c$的最大值.

- **策略4：记$b+c=t$，转化为轨迹有交点问题**



示例:已知：$b^2+c^2=9$,求$b+c$的最大值.

- **策略4：记$b+c=t$，转化为轨迹有交点问题**

解：记$b=x,c=y,b+c=t$,则问题转化为:

$\odot O$: $x^2+y^2=1$与直线$l:x+y=t$有交点,

所以O到l的距离$d=\dfrac{|t|}{\sqrt{2}}\leq 1$

解得，$t\leq\sqrt{2}$,当且仅当$b=c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时取等号,

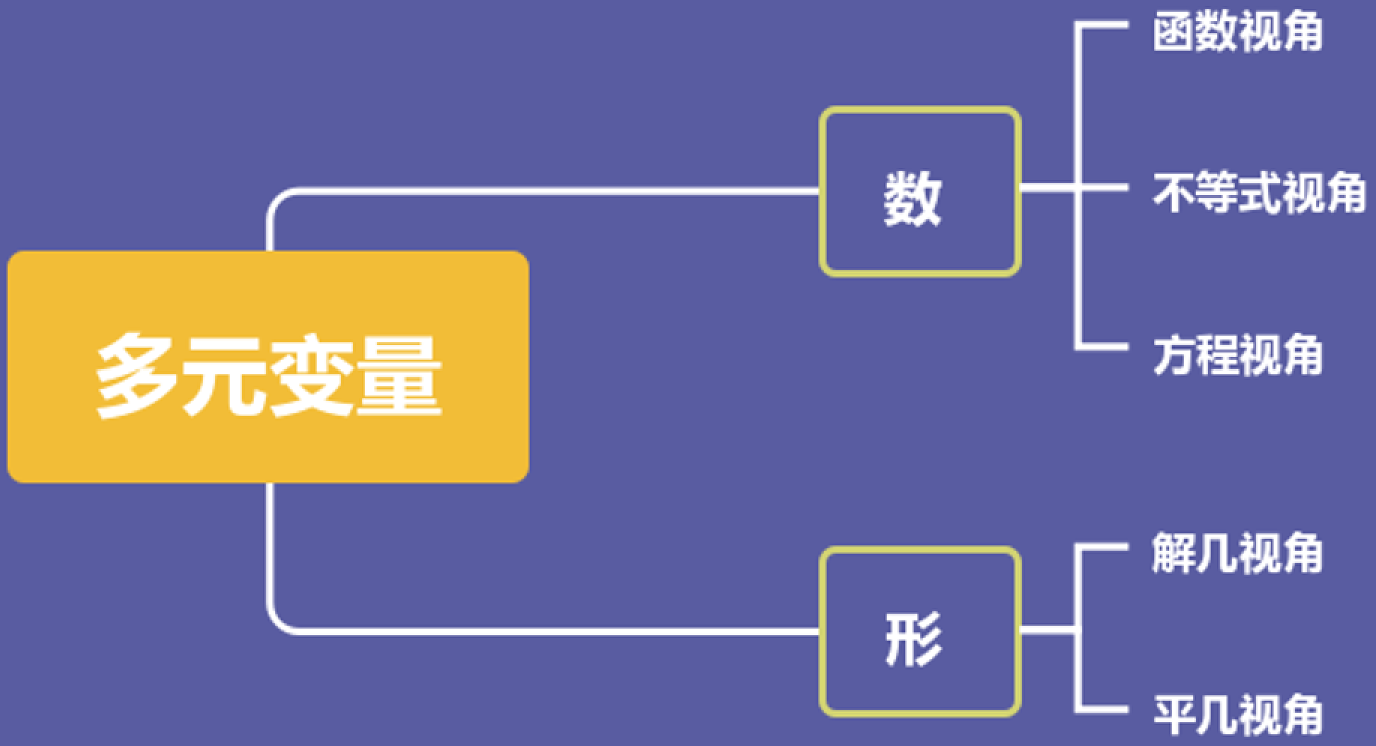
$\therefore (b+c)_{\max}=\sqrt{2}$.

已知：$b>0, c>0$，且$b^2+c^2+bc=9$，求$b+c$的最大值.

- 思考：能转化回平面几何问题吗？

ΔABC中，$a=3, A=\dfrac{2\pi}{3}$.求$b+c$的最大值.

- **策略4'：构造平几模型，利用平几性质解决问题**


多元变量
数
函数视角
不等式视角
方程视角
形
解几视角
平几视角

应用:

1、(2014浙江)已知$a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$,求a的最大值.

应用:

1、(2014浙江)已知$a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$,求a的最大值.

- **策略1：函数视角**

解:考虑$a^2+b^2+c^2=1$,设$b=\sqrt{1-a^2}\cos\theta, c=\sqrt{1-a^2}\sin\theta$,

$$\therefore a+b+c=a+\sqrt{1-a^2}\cos\theta+\sqrt{1-a^2}\sin\theta$$

$$=a+\sqrt{2-2a^2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=0, \therefore \frac{-a}{\sqrt{2-2a^2}}=\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[-1,1]$$

解得：$a\leq\frac{\sqrt{6}}{3}$,当$a=\frac{\sqrt{6}}{3}, b=c=-\frac{\sqrt{6}}{6}$时取等号,$\therefore a_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

应用：

1、(2014浙江)已知$a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$，求a的最大值.

- 策略2：不等式视角

解：$\because b+c=-a, b^2+c^2=1-a^2, \sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}} \geq \dfrac{b+c}{2}$,

$\therefore \sqrt{\dfrac{1-a^2}{2}} \geq \dfrac{-a}{2}, \therefore \dfrac{1-a^2}{2} \geq \dfrac{a^2}{4}$,

解得：$a \leq \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，当$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, b=c=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$时取等号，$\therefore a_{\max}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

应用:

1、(2014浙江)已知$a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$,求a的最大值.

• **策略3：方程视角**

解:问题等价于：方程组$\begin{cases} b+c=-a \\ b^2+c^2=1-a^2 \end{cases}$有解,

消c整理得:$2b^2+2ab+2a^2-1=0$,

$\therefore \Delta=4a^2-4\times 2(2a^2-1)\geq 0$

解得：$a\leq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,当$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, b=c=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$时取等号,$\therefore a_{\max}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

应用:

1、(2014浙江)已知$a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$,求a的最大值.

- 策略4:解几视角

解:令$b=x, c=y$,问题转化为:

$\odot O$:$x^2+y^2=1-a^2$与直线$l: x+y+a=0$有交点,

所以O到l的距离$d=\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}\le\sqrt{1-a^2}$

解得,$a\le\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,当$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, b=c=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$时取等号,$\therefore a_{\max}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

应用:

1、(2014浙江)已知$a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$,求a的最大值.

- **策略4'：平几视角**

解:消a得：$b^2+c^2+bc=\dfrac{1}{2}$

要使a最大，由轮转对称性可知，$a>0, b<0, c<0$,

设$-b=m, -c=n$,

问题转化为$\triangle PMN$中，$\angle P=\dfrac{2\pi}{3}, p=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,求$b+c$的最大值.

下略.

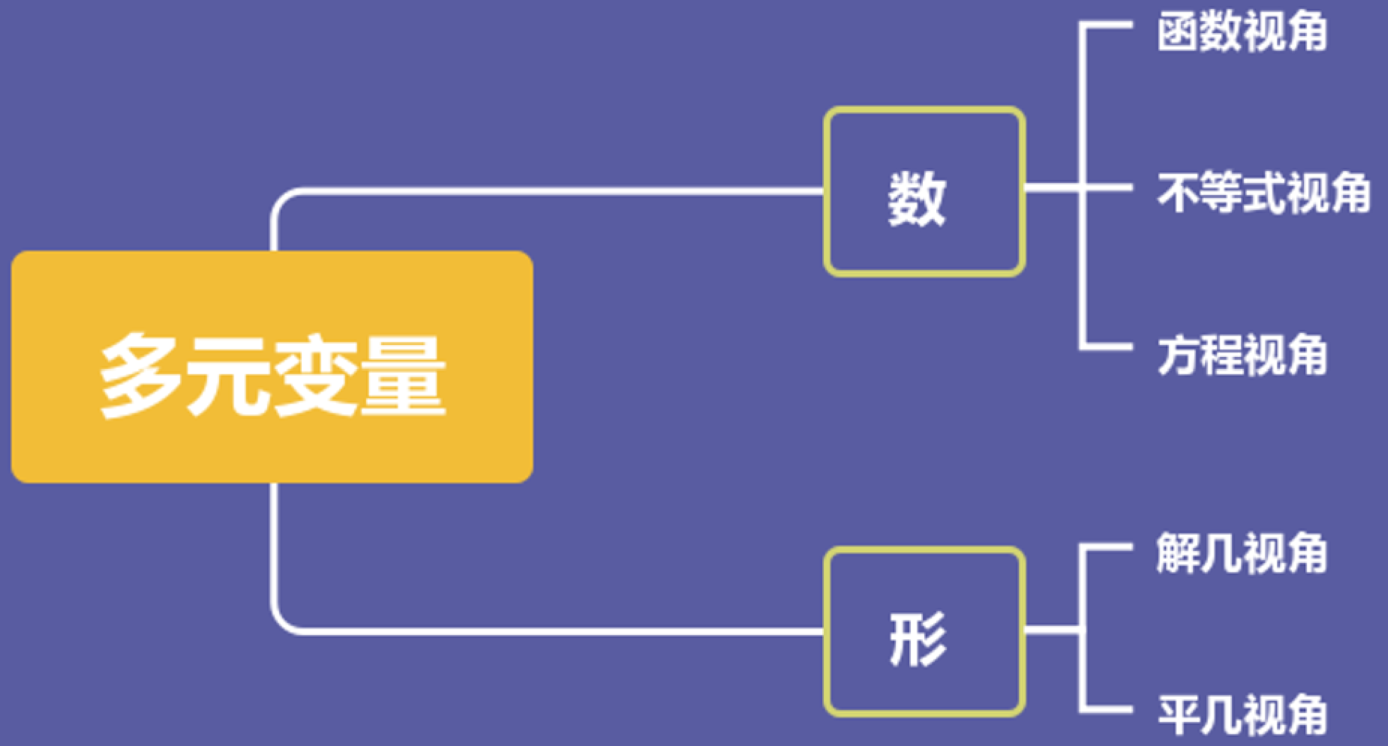
应用:

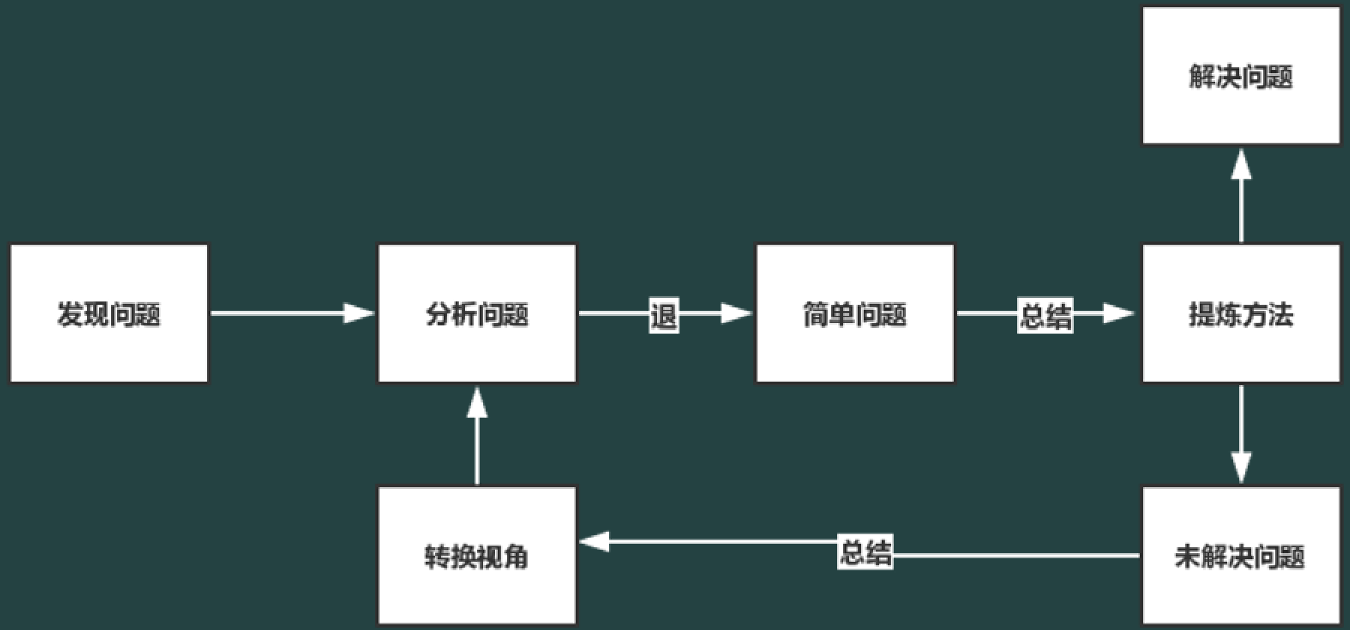
2、(2014辽宁)对于$c>0$,当非零实数a,b满足$4a^2-2ab+4b^2-c=0$,且使$|2a+b|$最大时,

求$\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{c}$的最小值.

核心问题：

- 如何研究多元变量的最值问题呢？


多元变量
数
函数视角
不等式视角
方程视角
形
解几视角
平几视角


发现问题
分析问题
退
简单问题
总结
提炼方法
解决问题
未解决问题
总结
转换视角

案例分析：多元变量最值与范围问题

以问题设计为起点，以问题驱动为导向，实现经验与知识的相互转化；

以自主探索为基础，以合作交流为途径，让学生成为真正的教学主体；

以体验探究为核心，以教师引导为桥梁，帮助学生通过深度加工把握知识本质。

案例分析：多元变量最值与范围问题

本原性问题：如何研究多元变量的最值与范围问题？

引例：$\triangle ABC$中，$\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \sin B \sin C$.

（1）求A.

（2）若$BC = 3$，求$\triangle ABC$周长的最大值.

探究：周长为什么有最大值？三角形为什么不固定？

开放性问题：除了解三角形视角，你还能从哪些视角认识本题？

数：函数视角、不等式视角、方程视角；形：解析几何视角、平面几何视角

创新性问题：运用本节课的思路，你觉得我们（在生活中、数学上、其他学科领域）还可以研究什么呢？

目录

CONTENTS

谢 谢!

敬请批评指正!