2023~2024 学年度第二学期高一数学 3 月月考模拟卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\cos 24°\cos 36° - \cos 66°\cos 54°$的值等于 (   )

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 已知向量$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$不共线，向量$\overrightarrow{m} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_1} + \lambda\overrightarrow{e_2}$且$\overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$，则$\lambda$的值为 (   )

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 2

3. 用二分法求函数$f(x) = 2^x + 3x - 7$ 在区间$[0,4]$上的零点的近似值，取区间中点 2，则下一个存在零点的区间为 (   )

A. $(0,1)$　　B. $(0,2)$　　C. $(2,3)$　　D. $(2,4)$

4. 下列各式中，值为$\frac{1}{2}$的是 (   )

A. $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}$　　C. $\sin15°\cos15°$　　D. $\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{2}}$

5. 已知两个单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$(2\vec{a} - 3\vec{b})\cdot(2\vec{a} + \vec{b}) = 3$，则$|2\vec{a} - 3\vec{b}|$的值为 (   )

A. $\sqrt{19}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{21}$

6. 已知 $\sin\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$(   )

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $\frac{7}{9}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

7. 在$\triangle ABC$中，向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$满足$(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})\cdot\overrightarrow{BC} = 0$，且$\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}\cdot\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\triangle ABC$为 (   )

A. 等边三角形　　B. 直角三角形　　C. 等腰非等边三角形　　D. 等腰直角三角形

8. 已知A为锐角，$\tan2A = \frac{\cos A}{2-\sin A}$，$\tan(A - B) = \frac{2\sqrt{15}}{15}$，则 $\tan B =$(   )

A. $-\frac{\sqrt{15}}{17}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{17}$　　C. $-\frac{2\sqrt{15}}{17}$　　D. $\frac{2\sqrt{15}}{17}$

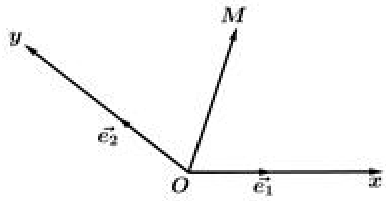
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数$f(x)=2^x+x-2$，$g(x)=\log_2 x+x-2$，$h(x)=x^3+x-2$ 的零点分别为a，b，c，则有(　)

A. $c=1$，$a>0$，$b>1$　　　　B. $b>c>a$

C. $a+b=2$，$c=1$　　　　D. $a+b<2$，$c=1$

10. 如图所示，设Ox，Oy是平面内相交成$\theta(\theta\neq\frac{\pi}{2})$角的两条数轴，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$分别是与$x$，$y$轴正方向同向的单位向量，则称平面坐标系$xOy$为$\theta$反射坐标系，若$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，则把有序数对$(x,y)$叫做向量$\overrightarrow{OM}$的反射坐标，记为$\overrightarrow{OM}=(x,y)$.在$\theta=\frac{3\pi}{4}$的反射坐标系中，$\vec{a}=(1,\sqrt{2})$，$\vec{b}=(\sqrt{2},-1)$.则下列结论中，错误的是(　)



A. $\vec{a}-\vec{b}=(1+\sqrt{2},\sqrt{2}-1)$　　　　B. $|\vec{a}|=1$

C. $\vec{a}\perp\vec{b}$　　　　D. $\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$-\sqrt{2}\vec{a}$

11. 已知函数$f(x)=\begin{cases}|\lg x|,\ 0<x\leq 2,\\ f(4-x),\ 2<x<4.\end{cases}$若方程$f(x)=m$有四个不等实根$x_1,x_2,x_3,x_4(x_1<x_2<x_3<x_4)$.下列说法正确的是(　)

A. $x_1x_2=1$　　B. $0<m<\lg 2$　　C. $x_3+x_4=6$　　D. $x_3+10^m=4$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=4$，$\vec{a},\vec{b}$的夹角为 120°，则使向量$\vec{a}+k\vec{b}$与$k\vec{a}+\vec{b}$的夹角是锐角的实数k的取值范围是_____.

13. 已知$\vec{e}$为一个单位向量，$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角是 120°.若$\vec{a}$在$\vec{e}$上的投影向量为$-2\vec{e}$，则$|\vec{a}|=$_____.

14. 在△ABC中，点O是BC的三等分点，$|\overrightarrow{OC}|=2|\overrightarrow{OB}|$，过点$O$的直线分别交直线$AB$，$AC$于点$E$，$F$，且$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AF}(m>0,n>0)$，若$\frac{1}{m}+\frac{t^2}{n}(t>0)$的最小值为 3，则正数$t$的值为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题 13 分）

已知函数$f(x)=2a\sin2x+(a-1)(\sin x+\cos x)+2a-8, x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，其中$a>0$．

当$a=2$ 时，求$f(x)$的值域.

16. (本小题 15 分)

已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

(1)求 $\tan2\alpha$的值；

(2)求 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值；

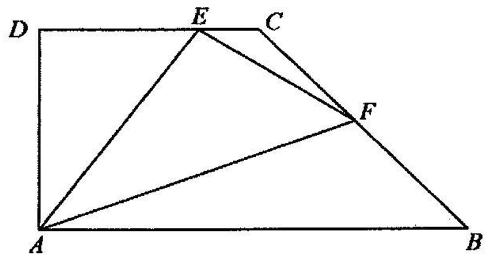
(3)若 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$且 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}$，求 $\sin\beta$的值.

17. (本小题 15 分)

在直角梯形$ABCD$中，已知$AB//CD$，$\angle DAB=90°$，$AB=2AD=2CD=2$，点F是BC边上的中点，点E是CD边上一个动点.

(1)若$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，求$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}$的值；

(2)求$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}$的取值范围.



18.(本小题 17 分)

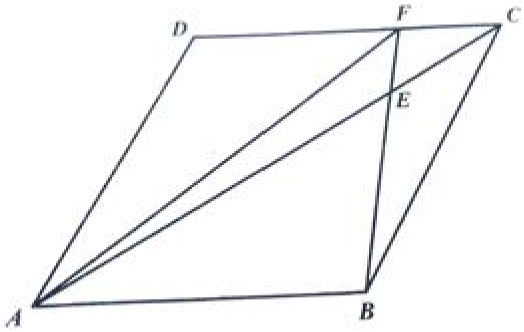
如图，在边长为 2 的菱形$ABCD$中$\angle BAD = 60°$.

(1)求$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$；

(2)若E为对角线AC上一动点.

①若$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$，求$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$；

②连结BE并延长，交CD于点F，连结AF，设$\overrightarrow{CE} = \lambda\overrightarrow{EA}(0⩽\lambda⩽1)$.当$\lambda$为何值时，可使$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BF}$最小，并求出$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BF}$的最小值.



19. (本小题 17 分)

对于一个向量组$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$，$\cdots$，$\overrightarrow{a_n}(n \geq 3, n \in N^*)$，令$\overrightarrow{S_n} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}$，如果存在$\overrightarrow{a_p}(p \in N^*)$，使得$|\overrightarrow{a_p}| \geq |\overrightarrow{S_n} - \overrightarrow{a_p}|$，那么称$\overrightarrow{a_p}$是该向量组的“长向量”.

(1)若$\overrightarrow{a_3}$是向量组$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$的“长向量”，且$\overrightarrow{a_n} = (n, x+n)$，求实数$x$的取值范围;

(2)已知$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$均是向量组$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$的“长向量”，试探究$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$的等量关系并加以证明.

2023~2024 学年度第二学期高一数学周末练习 3

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\cos 24°\cos 36° - \cos 66°\cos 54°$的值等于 (　)

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B

【解答】解：$cos24°cos36° - cos66°cos54° = cos24°cos36° - sin24°sin36°$

$= \cos(24° + 36°) = \cos60° = \frac{1}{2}$．故选 B.

2. 已知向量$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$不共线，向量$\overrightarrow{m} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_1} + \lambda\overrightarrow{e_2}$且$\overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$，则$\lambda$的值为 (　)

A. 1　　B. -1　　C. ± 1　　D. 2

【答案】C

【解答】解：$\because \overrightarrow{m} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_1} + \lambda\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$，$\therefore \lambda\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = k(\overrightarrow{e_1} + \lambda\overrightarrow{e_2})$，

$\therefore \lambda\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = k\overrightarrow{e_1} + \lambda k\overrightarrow{e_2}$，

$\therefore \begin{cases} k = \lambda \\ 1 = \lambda k \end{cases}$，解得$\begin{cases} k = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$或$\begin{cases} k =- 1 \\ \lambda =- 1 \end{cases}$，$\therefore \lambda =\pm 1$.

3. 用二分法求函数$f(x) = 2^x + 3x - 7$ 在区间$[0,4]$上的零点的近似值，取区间中点 2，则下一个存在零点的区间为 (　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,2)$　　C. $(2,3)$　　D. $(2,4)$

【答案】B

【解答】解：$\because f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 7 = 3 > 0$，$f(0) = 2^0 + 3 \times 0 - 7 =- 6 < 0$，

$\therefore f(0) \times f(2) < 0$，$\therefore$下一个零点存在的区间为$(0,2)$．故选 B.

4. 下列各式中，值为$\frac{1}{2}$的是 (　)

A. $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\tan22.5°}{1-\tan^2 22.5°}$　　C. $\sin15°\cos15°$　　D. $\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{2}}$

【答案】B

【解答】解：对于A、因为$\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \cos\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$A$不正确；

对于B、因为$\frac{\tan\ 22.5°}{1-\tan^2 22.5°} = \frac{1}{2}\tan\ 45° = \frac{1}{2}$，所以 B 正确；

对于C、因为 $\sin\ 15°\cos\ 15° = \frac{1}{2}\cdot\sin\ 30° = \frac{1}{4}$，所以$C$不正确；

对于D、因为$\sqrt{\frac{1+cos\frac{\pi}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$D$不正确．故选 B.

5. 已知两个单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=3$，则$|2\vec{a}-3\vec{b}|$的值为 (　)

A. $\sqrt{19}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{21}$

【答案】A

【解答】解：由题意得 $4\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^2=3$，即 $4-4\vec{a}\cdot\vec{b}-3=3$，$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$,

即$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})^2=4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2=4-12\times(-\frac{1}{2})+9=19$，

$\therefore|2\vec{a}-3\vec{b}|\ =\sqrt{19}$．故选 A．

6. 已知 $\sin\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$(　)

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $\frac{7}{9}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

【答案】B

【解答】解：因为 $\sin\alpha+\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\sqrt{3}\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$,

所以 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})=\cos[2(\alpha+\frac{\pi}{6})]=1-2sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{7}{9}$．故选：$B$．

7. 在$\triangle ABC$中，向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$满足$(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且$\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}\cdot\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\triangle ABC$为 (　)

A. 等边三角形　　B. 直角三角形　　C. 等腰非等边三角形　　D. 等腰直角三角形

【答案】D

【解答】解：因为$(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以$\angle BAC$的平分线与$BC$垂直，

所以三角形ABC是等腰三角形，且$AB=AC$．

又因为$\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}\cdot\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\angle ABC=45°$，所以三角形$ABC$是等腰直角三角形．故选：$D$．

8. 已知A为锐角，$\tan2A=\frac{\cos A}{2-\sin A}$，$\tan(A-B)=\frac{2\sqrt{15}}{15}$，则 $\tan B=$(　)

A. $-\frac{\sqrt{15}}{17}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{17}$　　C. $-\frac{2\sqrt{15}}{17}$　　D. $\frac{2\sqrt{15}}{17}$

【答案】A

【解答】解：因为 $\tan2A=\frac{\cos A}{2-\sin A}$，所以$\frac{\sin2A}{\cos2A}=\frac{\cos A}{2-\sin A}$，所以$\frac{2\sin A\cos A}{1-2sin^2A}=\frac{\cos A}{2-\sin A}$,

又A为锐角，$\cos A>0$，所以 $2\sin A(2-\sin A)=1-2sin^2A$，解得 $\sin A=\frac{1}{4}$,

因为A为锐角，所以 $\cos A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan A=\frac{\sqrt{15}}{15}$,

又 $\tan(A-B)=\frac{2\sqrt{15}}{15}$,

所以 $\tan B=\tan[A-(A-B)]=\frac{\tan A-\tan(A-B)}{1+\tan A\tan(A-B)}=\frac{\frac{\sqrt{15}}{15}-\frac{2\sqrt{15}}{15}}{1+\frac{\sqrt{15}}{15}\times\frac{2\sqrt{15}}{15}}=-\frac{\sqrt{15}}{17}$. 故选：$A$.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数$f(x)=2^x+x-2$，$g(x)=\log_2x+x-2$，$h(x)=x^3+x-2$ 的零点分别为a，b，c，则有(　)

A. $c=1$，$a>0$，$b>1$　　　　B. $b>c>a$

C. $a+b=2$，$c=1$　　　　D. $a+b<2$，$c=1$

【答案】ABC

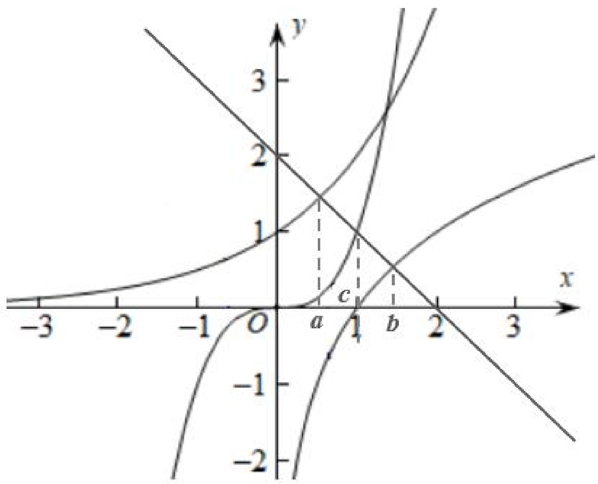
【解答】解：∵函数$f(x)=2^x+x-2$，$g(x)=\log_2x+x-2$，$h(x)=x^3+x-2$ 的零点分别为a，b，c，

∴ $2^a+a-2=0$，$\log_2b+b-2=0$，$c^3+c-2=0$，

∴$-a+2=2^a$，$-b+2=\log_2b$，$-c+2=c^3$，

∴ a、b、c分别为直线$y=-x+2$ 和曲线$y=2^x$，$y=\log_2x$，$y=x^3$的交点的横坐标，

如图所示：



∴结合图象可知$a>0$，$b>1$，$c=1$，即选项 A 正确；

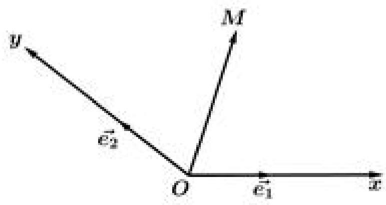
∴由图可知$b>c>a$，即选项 B 正确;

∵ $y=2^x$，$y=\log_2x$互为反函数，其图象关于直线$y=x$对称，

且直线$y=-x+2$ 与$y=x$垂直于点$(1,1)$，

∴ $a+b=2$，即选项 C 正确，选项 D 错误.

10. 如图所示，设Ox，Oy是平面内相交成$\theta(\theta \neq \frac{\pi}{2})$角的两条数轴，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$分别是与$x$，$y$轴正方向同向的单位向量，则称平面坐标系$xOy$为$\theta$反射坐标系，若$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$，则把有序数对$(x, y)$叫做向量$\overrightarrow{OM}$的反射坐标，记为$\overrightarrow{OM} = (x, y)$.在$\theta = \frac{3\pi}{4}$的反射坐标系中，$\vec{a} = (1, \sqrt{2})$，$\vec{b} = (\sqrt{2}, -1)$.



则下列结论中，错误的是(   )

A. $\vec{a} - \vec{b} = (1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$　　B. $|\vec{a}| = 1$

C. $\vec{a} \perp \vec{b}$　　D. $\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$-\sqrt{2}\vec{a}$

【答案】ACD

【解答】解：在$\theta = \frac{3\pi}{4}$的反射坐标系中，$\vec{a} = (1, \sqrt{2})$，$\vec{b} = (\sqrt{2}, -1)$，

对于A，$\vec{a} - \vec{b} = (\overrightarrow{e_1} + \sqrt{2}\overrightarrow{e_2}) - (\sqrt{2}\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}) = (1 - \sqrt{2})\overrightarrow{e_1} + (\sqrt{2} + 1)\overrightarrow{e_2}$，

所以$\vec{a} - \vec{b} = (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$，故选项$A$错误；

对于B，$|\vec{a}| = \sqrt{(\overrightarrow{e_1} + \sqrt{2}\overrightarrow{e_2})^2} = \sqrt{\overrightarrow{e_1}^2 + 2\sqrt{2}\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_2}^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}} = 1$，故选项$B$正确；

对于C，$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\overrightarrow{e_1} + \sqrt{2}\overrightarrow{e_1}) \cdot (\sqrt{2}\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$，所以$\vec{a}$与$\vec{b}$不垂直，故选项$C$错误；

对于D，$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}\vec{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}$，故选项$D$错误．故选：$ACD$.

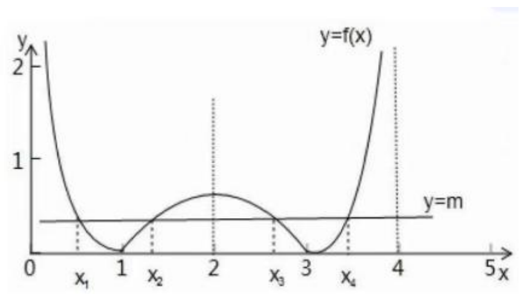
11. 已知函数$f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & 0 < x \leq 2, \\ f(4 - x), & 2 < x < 4. \end{cases}$若方程$f(x) = m$有四个不等实根$x_1, x_2, x_3, x_4(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$.下列说法正确的是 (   )

A. $x_1 x_2 = 1$　　B. $0 < m < \lg 2$　　C. $x_3 + x_4 = 6$　　D. $x_3 + 10^m = 4$

【答案】ABD

【解答】解：因为$2 < x < 4$时，$f(x) = f(4 - x)$，则函数$y = f(x)$图像关于$x = 2$对称，

作出函数$f(x)$的图象：如图：



对于A，由题意可知方程$f(x) = m$有四个不等实根$x_1, x_2, x_3, x_4(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$，

所以由$f(x_1) = f(x_2)$，即$|\ln x_1| = |\ln x_2|$，得$-\ln x_1 = \ln x_2$，化简可得$x_1 x_2 = 1$，故A正确；

对于B，若方程$f(x) = m$有四个不等实根，即函数$f(x)$的图象与直线$y = m$有四个不同的交点，

因为$f(2)=\lg 2$，所以 $0<m<\lg 2$，故 B 正确；

对于C，因为函数$f(x)$图像关于$x=2$ 对称，所以$x_1+x_4=x_2+x_3=4$，则$x_1+x_2+x_3+x_4=8$，

但因x_1的值不确定，所以无法确定x_3+x_4的值，故 C 错误；

对于D，因为$f(x_2)=\lg x_2=m$，所以$x_2=10^m$，函数$f(x)$图像关于$x=2$ 对称，

所以$x_2+x_3=4$，即$x_3+10^m=4$，故 D 正确，故选 ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=4$，$\vec{a},\vec{b}$的夹角为 120°，则使向量$\vec{a}+k\vec{b}$与$k\vec{a}+\vec{b}$的夹角是锐角的实数k的取值范围是______.

【答案】$(\frac{5-\sqrt{21}}{2},1)\cup(1,\frac{5+\sqrt{21}}{2})$

【解答】解：因为$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为 120°，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times4\times\cos120°=-4$,

因为向量$\vec{a}+k\vec{b}$与$k\vec{a}+\vec{b}$的夹角是锐角，

所以$\begin{cases}1:k\neq k:1\\(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(k\vec{a}+\vec{b})>0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}k\neq\pm1\\k\vec{a}^2+k\vec{b}^2+(1+k^2)(\vec{a}\cdot\vec{b})>0\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}k\neq\pm1\\4k+16k+(1+k^2)(-4)>0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}k\neq\pm1\\k^2-5k+1<0\end{cases}$

$\therefore\frac{5-\sqrt{21}}{2}<k<\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ 且$k\neq1$，故实数k的取值范围是$(\frac{5-\sqrt{21}}{2},1)\cup(1,\frac{5+\sqrt{21}}{2})$.

13. 已知$\vec{e}$为一个单位向量，$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角是 120°.若$\vec{a}$在$\vec{e}$上的投影向量为$-2\vec{e}$，则$|\vec{a}|=$______.

【答案】4

【解答】解：由题意得，$\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\times1\times cos120°=-\frac{1}{2}|\vec{a}|$,

因为$\vec{a}$在$\vec{e}$上的投影向量为$-\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot\vec{e}=-2\vec{e}$，所以$|\vec{a}|=4$．故答案为：4．

14. 在$\triangle ABC$中，点O是BC的三等分点，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$，过点$O$的直线分别交直线$AB$，$AC$于点$E$，$F$，且$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=m\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=n\overrightarrow{\mathrm{AF}}(m>0,n>0)$，若$\frac{1}{m}+\frac{t^2}{n}(t>0)$的最小值为 3，则正数$t$的值为______.

【答案】$3-\sqrt{2}$

【解答】解：$\because$在$\triangle ABC$中，点O是BC的三等分点，$|\overrightarrow{OC}|=2|\overrightarrow{OB}|$,

$\therefore\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\because\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AF}$，$\therefore\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}m\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}n\overrightarrow{AF}$,

$\because O$，E，F三点共线，$\therefore\frac{2}{3}m+\frac{1}{3}n=1$，

$\therefore\frac{1}{m}+\frac{t^2}{n}=(\frac{1}{m}+\frac{t^2}{n})(\frac{2}{3}m+\frac{1}{3}n)=\frac{2}{3}+\frac{n}{3m}+\frac{2mt^2}{3n}+\frac{t^2}{3}\geq2\sqrt{\frac{2t^2}{9}}+\frac{t^2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{t^2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{2}t+\frac{2}{3}$,

当且仅当$\frac{n}{3m}=\frac{2mt^2}{3n}$，即 $2m^2t^2=n^2$时取等号，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{t^2}{n}$的最小值为$\frac{t^2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{2}t+\frac{2}{3}$，即$\frac{t^2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{2}t+\frac{2}{3}=3$，

$\because t>0$，$\therefore t=3-\sqrt{2}$．故答案为：$3-\sqrt{2}$．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题 13 分）

已知函数$f(x)=2a\sin 2x+(a-1)(\sin x+\cos x)+2a-8, x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，其中$a>0$．

当$a=2$ 时，求$f(x)$的值域.

解：当$a=2$ 时，$f(x)=4\sin 2x+\sin x+\cos x-4=8\sin x\cdot\cos x+\sin x+\cos x-4$，

令$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，因为$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，则$x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，所以$t\in[-1,1]$，

又由$t=\sin x+\cos x$，所以$t^2=1+2\sin x\cdot\cos x$，则 $\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，

所以$g(t)=4(t^2-1)+t-4=4\left(t+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{129}{16}, t\in[-1,1]$，

所以$g(t)$的值域为$\left[-\frac{129}{16},-3\right]$，即$f(x)$的值域为$\left[-\frac{129}{16},-3\right]$.

16. (本小题 15 分)

已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

(1)求 $\tan 2\alpha$的值；

(2)求 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值；

(3)若 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$且 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}$，求 $\sin\beta$的值.

【答案】解：(1)因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,

所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$,

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$,

所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\frac{24}{7}$,

$$(2)\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)$$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-2\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-2\times\frac{16}{25}-2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5})=-\frac{31\sqrt{2}}{50}$,

(3)因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$，

因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

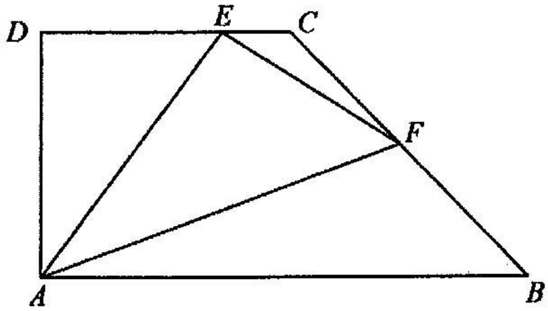
所以 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{3}{5}-(-\dfrac{1}{3})\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{6\sqrt{2}+4}{15}$

17. (本小题 15 分)

在直角梯形$ABCD$中，已知$AB//CD$，$\angle DAB=90°$，$AB=2AD=2CD=2$，点F是BC边上的中点，点E是CD边上一个动点.



(1)若$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，求$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}$的值；

(2)求$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}$的取值范围.

【答案】解：(1)由图知：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$,

所以$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$,

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD})$,

又$AB=2AD=2CD=2$，$AB//CD$，$\angle DAB=90°$,

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\times(0+1\times2-1^2-0)=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC})$,

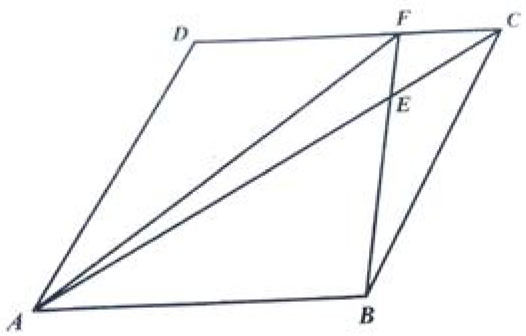
令$\overrightarrow{EC}=\lambda\overrightarrow{DC}$且 $0\le\lambda\le1$，则$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}-(1-\lambda)\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{EF}=(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$,

所以$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}=(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}-(1-\lambda)(\lambda-\frac{1}{2})\overrightarrow{DC}^2+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}^2)-\frac{1-\lambda}{2}(\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD})=(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=(\lambda-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}$.

则$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}\in[-\frac{1}{16},\frac{1}{2}]$.

18. (本小题 15 分)

如图，在边长为 2 的菱形$ABCD$中$\angle BAD=60°$.



(1)求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$；

(2)若E为对角线AC上一动点.

①若$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$，求$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$；

②连结BE并延长，交CD于点F，连结AF，设$\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{EA}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$.当$\lambda$为何值时，可使$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}$最小，并求出$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}$的最小值.

【答案】解：(1) ∵菱形$ABCD$的边长为 2 ∴ $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=2$

∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|cos\angle BAD=2\times2\times cos60°=2$.

(2)① ∵菱形$ABCD$，∴ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

∴ $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|)^2}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$.

又∵ $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$，所以$|\overrightarrow{AE}|=\frac{3}{4}|\overrightarrow{AC}|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}$，

② ∵ $\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{EA}$，$\triangle ABE\backsim\triangle CFE$，$|\overrightarrow{AB}|=2$，

∴ $|\overrightarrow{CF}|=2\lambda$，$|\overrightarrow{FD}|=2-2\lambda$，

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF})=4+2\times2\lambda\times\cos120°+(2-2\lambda)\times2\times\frac{1}{2}+(2-2\lambda)\times2\lambda\cos180°$

$=4\lambda^2-8\lambda+6=4(\lambda-1)^2+2$， ∴当$\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}$的值最小，最小值为 2.

19. (本小题 17 分)

对于一个向量组$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$，⋯，$\overrightarrow{a_n}(n\geq3,n\in N^*)$，令$\overrightarrow{S_n}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\cdots+\overrightarrow{a_n}$，如果存在$\overrightarrow{a_p}(p\in N^*)$，

使得$|\overrightarrow{a_p}| \geq |\overrightarrow{S_n} - \overrightarrow{a_p}|$，那么称$\overrightarrow{a_p}$是该向量组的“长向量”．

(1)若$\overrightarrow{a_3}$是向量组$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$的“长向量”，且$\overrightarrow{a_n} = (n, x+n)$，求实数$x$的取值范围;

(2)已知$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$均是向量组$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$的“长向量”，试探究$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$的等量关系并加以证明．

【答案】解：(1)由“长向量”定义得$|\overrightarrow{a_3}| \geqslant |\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}|$.

因为$\overrightarrow{a_n} = (n, x+n)$，所以$\overrightarrow{a_1} = (1, x+1)$，$\overrightarrow{a_2} = (2, x+2)$，$\overrightarrow{a_3} = (3, x+3)$，

$\therefore \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} = (3, 2x+3)$，$\therefore \sqrt{9+(x+3)^2} \geqslant \sqrt{9+(2x+3)^2}$，解得$-2 \leqslant x \leqslant 0$，

$\therefore$实数x的取值范围为$[-2,0]$.

(2)$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$的等量关系为$\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{0}$.

证明：由题意可知，$\overrightarrow{a_1}$是向量组$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$的“长向量”，即满足$|\overrightarrow{a_1}| \geqslant |\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}|$.

所以$|\overrightarrow{a_1}|^2 \geqslant |\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}|^2$，即$\overrightarrow{a_1}^2 \geqslant (\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3})^2$，

展开化简可得$\overrightarrow{a_1}^2 \geqslant \overrightarrow{a_2}^2 + \overrightarrow{a_3}^2 + 2\overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_3}$，

同理$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$也是向量组$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$的“长向量”，

则$\overrightarrow{a_2}^2 \geqslant \overrightarrow{a_1}^2 + \overrightarrow{a_3}^2 + 2\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_3}$，

$\overrightarrow{a_3}^2 \geqslant \overrightarrow{a_1}^2 + \overrightarrow{a_2}^2 + 2\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}$，

三式相加并化简得：$0 \geqslant \overrightarrow{a_1}^2 + \overrightarrow{a_2}^2 + \overrightarrow{a_3}^2 + 2\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} + 2\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_3} + 2\overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_3}$，

即$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3})^2 \leqslant 0$，$|\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}| \leqslant 0$，

$\therefore \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{0}$.