江苏省江都中学、江苏省仪征中学

2023-2024 学年度第二学期高一 3 月联合测试数学试卷

命题单位：江苏省仪征中学　　　　　　　　命题人：张顺军　　　审核人：鲁媛媛

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题5 分，共 40 分. 在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $\cos 15^\circ \cos 45^\circ - \cos 75^\circ \sin 45^\circ$ 等于（　　）

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

2．用二分法求方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间 $[2,3]$ 内的实根，下一个有根区间是（　）

A．$[2,2.5]$　　B．$[2.5,3]$　　C．$[2,2.25]$　　D．$[2.75,3]$

3. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 均为单位向量，它们的夹角为 60°，那么 $|\vec{a}+3\vec{b}|=$（　　）

A. $\sqrt{13}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. 4　　D. 13

4. 已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不共线，且 $\vec{c}=x\vec{a}+\vec{b},\vec{d}=\vec{a}+(2x-1)\vec{b}$，若 $\vec{c}$ 与 $\vec{d}$ 共线，则实数 x 的值为（　　）

A. 1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 1 或 $-\dfrac{1}{2}$　　D. -1 或 $-\dfrac{1}{2}$

5. 已知 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A. $-\dfrac{7}{25}$　　B. $\dfrac{7}{25}$　　C. $-\dfrac{24}{25}$　　D. $\dfrac{24}{25}$

6. 在△ABC 中，$\left(\overline{BC}+\overline{BA}\right)\cdot\overline{AC}=\left|\overline{AC}\right|^2$，则△$ABC$ 的形状一定是（　　）

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

7．已知函数 $f(x)=3^x+2x+1$，$g(x)=\log_3 x+2x+1$，$h(x)=x^3+2x+1$ 的零点分别是 a，b，c，则 a，b，c 的大小顺序为（　）

A．$a>c>b$　　B．$b>c>a$　　C．$b>a>c$　　D．$a>b>c$

8. 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),2\tan\alpha=\dfrac{\sin 2\beta}{\sin\beta+\sin^2\beta}$，则 $\tan\left(2\alpha+\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A. $-\sqrt{3}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题6 分，共 18 分. 每小题给出的四个选项中，不止一项是符合题目要求的. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．下列各式中值为$\dfrac{1}{2}$的是(　　)

A．$2\sin 75°\cos 75°$　　B．$\dfrac{3\tan 15°}{1-\tan^2 15°}$

C．$\cos 20°\cos 40°+\sin 200°\sin 140°$　　D．$\tan 20°+\tan 25°+\tan 20°\tan 25°$

10. 定义两个非零平面向量的一种新运算$\left|\vec{a}\right|*\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin<\vec{a},\vec{b}>$，其中$<\vec{a},\vec{b}>$表示$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角，则对于两个非零平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，下列结论一定成立的有（　　）

A. $\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$\left|\vec{a}\right|\sin<\vec{a},\vec{b}>\cdot\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$　　B. $\left(\vec{a}*\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2$

C. 若$\lambda\left(\vec{a}*\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$　　D. 若$\vec{a}*\vec{b}=0$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$平行

11. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2x, x\le 0\\ \left|\ln x\right|-2, x>0\end{cases}$，若方程$f(x)=m$有四个不等实根$x_1,x_2,x_3,x_4\ (x_1<x_2<x_3<x_4)$，则下列说法正确的是(　　)

A. $x_1+x_2=-2$　　B. $x_3\cdot x_4=e$

C. $x_3=e^{x_1x_2-2}$　　D. $\dfrac{x_3}{x_4}-\dfrac{2}{x_1x_3^2+x_2x_3^2}$最小值为 2

三、填空题：本题共 3 小题，每小题5 分，共 15 分. 请把答案直接填写在答题卡相应位置上.

12. 已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$（$\omega>0$）的一个零点为$\dfrac{\pi}{12}$，则$\omega$的最小值为______.

13. 在$\triangle ABC$中，点P满足$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}$，过点$P$的直线与$AB$，$AC$所在直线分别交于点$M$，$N$，若$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AC}$，$m>0$，$n>0$则$m+2n$的最小值为__________.

14. 已知$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=1$，$\vec{e}$是与$\vec{b}$方向相同的单位向量，且向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$方向上的投影向量为$-\vec{e}$.

（1）$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\theta=$______；（2）若向量$\lambda\vec{a}+\vec{b}$与向量$\vec{a}-3\vec{b}$所成角为钝角，则λ的取值范围是_______

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题 13 分）

函数 $f(x)=x^2-2ax+1$，其中 $a\in \mathrm{R}$.

(1)若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 在区间 $x\in[-2,3]$ 上的值域；

(2)若函数 $f(x)$ 有两个正数零点 x_1，$x_2\left(x_1<x_2\right)$，

（i）求 a 的取值范围；

（ii）求 $4x_1+x_2$ 的最小值以及取到最小值时 a 的值.

16.（本小题 15 分）

已知 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3},\alpha,\beta$ 均为锐角.

（1）求 $\sin 2\alpha$ 的值；

（2）求 $\cos\beta$ 的值.

17.（本小题 15 分）

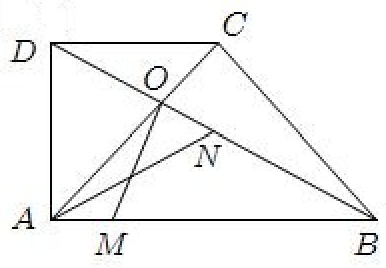
在直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB//CD,\angle DAB=90°,AB=2,AD=CD=1$，对角线 AC 与 BD 交于点 O，点 M 在 AB 上，且满足 $OM\perp BD$.

（1）求 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值；

（2）若 N 为线段 BD 上的任意一点，若 $\overrightarrow{DN}=\lambda\overrightarrow{DB}$，

①用向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 表示向量 $\overrightarrow{AN}$；

②求证：$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{OM}$ 为定值；



（3）若 Q 为线段 AC 上任意一点，求 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的最小值.

18.（本小题 17 分 ）

已知向量 $\vec{a}=\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right),\vec{b}=\left(\cos x,\sin x\right)$，$\vec{c}=\left(\sin x+2\sin\alpha,\cos x+2\cos\alpha\right)$，其中 $0<\alpha<x<\pi$

（1）若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，求函数 $f(x)=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 的最小值及相应的 x 的值；

（2）若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，且 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\sin 2\alpha$，求 α 的值.

19. (本小题 17 分)

对于给定的正整数n，记集合$R^n=\{\vec{\alpha}\mid\vec{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$，$x_j\in R$，$j=1$，$2$，$3$，$\cdots$，$n\}$，其中元素$\vec{\alpha}$称为一个$n$维向量．特别地，$\vec{0}=(0,0,\cdots,0)$称为零向量．

设$k\in R$，$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$，$\vec{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^n$，定义加法和数乘：

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$，$k\vec{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$.

对一组向量$\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$，…，$\overrightarrow{\alpha_s}(s\in N_+,s\geq 2)$，若存在一组不全为零的实数$k_1$，$k_2$，…，$k_s$，使得$k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_2}+\cdots+k_s\overrightarrow{\alpha_s}=\vec{0}$，则称这组向量线性相关．否则，称为线性无关．

(I)对$n=3$，判断下列各组向量是线性相关还是线性无关，并说明理由．

①$\vec{\alpha}=(1,1,1)$，$\vec{\beta}=(2,2,2)$；

②$\vec{\alpha}=(1,1,1)$，$\vec{\beta}=(2,2,2)$，$\vec{\gamma}=(5,1,4)$；

③$\vec{\alpha}=(1,1,0)$，$\vec{\beta}=(1,0,1)$，$\vec{\gamma}=(0,1,1)$，$\vec{\delta}=(1,1,1)$.

(II)已知向量$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$，$\vec{\gamma}$线性无关，判断向量$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$，$\vec{\beta}+\vec{\gamma}$，$\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$是线性相关还是线性无关，并说明理由．

(III)已知$m(m\geq 2)$个向量$\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$，…，$\overrightarrow{\alpha_m}$线性相关，但其中任意$m-1$个都线性无关，证明下列结论：

(i)如果存在等式$k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_2}+\cdots+k_m\overrightarrow{\alpha_m}=\vec{0}\,(k_i\in R,i=1,2,3,\cdots,m)$，则这些系数$k_1$，$k_2$，…，$k_m$或者全为零，或者全不为零；

(ii)如果两个等式$k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_2}+\cdots+k_m\overrightarrow{\alpha_m}=\vec{0}$，

$l_1\overrightarrow{\alpha_1}+l_2\overrightarrow{\alpha_2}+\cdots+l_m\overrightarrow{\alpha_m}=\vec{0}\,(k_i\in R,l_i\in R,i=1,2,3,\cdots,m)$同时成立，其中$l_1\neq 0$，则$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}$.