



九省联考数学卷分析与备考策略探讨





一石激起千层浪!

2024年，吉林等7个省区第四批高考综合改革地区将要首考落地，为实现平稳过渡，组织了适应性演练。加上河南省、新疆维吾尔自治区加入，共九省区参加考试，可谓史上最大规模。由于“适应性测试昭示了未来高考改革的方向”，自然备受广泛关注。针对2024年九省高考适应性演练数学卷（以下简称九省联考卷），见仁见智，褒贬不一，众说纷纭……

- 2024年九省联考卷是2024年高考数学命题的样板吗？
- 2024年高考数学备考何去何从？

高考数学新高考卷(含适应考试)使用省份

年份	适应性考试	新高考卷(全国)	参加省份
2020	2020二省联考		山东、海南
		2020新 I	山东
		2020新 II	海南
2021	2021八省联考		湖北、广东、重庆、江苏、湖南、河北、福建、辽宁
		2021新 I	湖北、广东、山东、江苏、湖南、河北、福建
		2021新 II	重庆、辽宁、海南
2022		2022新 I	湖北、广东、山东、江苏、湖南、河北、福建
		2022新 II	重庆、辽宁、海南
2023	2023四省联考		安徽、云南、吉林、黑龙江
		2023新 I	湖北、广东、山东、江苏、湖南、河北、福建、 浙江
		2023新 II	重庆、辽宁、海南、安徽、云南、吉林、黑龙江、 山西
2024	2023九省联考		新疆、甘肃、贵州、广西、河南、 安徽 、江西、 黑龙江 、 吉林
		??	?? (2023已用新高考全国卷16个, 2024预计新增6个, 共22个)



理解适应性考试：回顾几篇重要文章

2021年八省联考

《中学数学教学参考》

2021年第2期(上)

高考命题改革新举措

○ 本刊编辑部

四、适应性测试的意义。适应性测试的本意是为了命题人员了解考生复习备考的情况，了解考生的水平，为正式考试准确把握难度提供依据。但从2020年起，高考进入了后考试大纲时代，以往规定考试内容、考试要求、试卷结构、题型示例的考试大纲和考试说明不复存在，教师无从了解考试的相关要求，更不能第一时间知晓当年命题改革的动向。因此从这个意义上讲，适应性测试不但是命题人员了解考生水平的手段，更是中学教师了解高考要求和高考命题改革方向的唯一途径。



理解适应性考试：回顾几篇重要文章

2023年四省联考

《中学数学教学参考》

2023年第4期(上)

高考测试题的作用、价值和启示

○ 本刊编辑部



1、适应性测试是沟通考试和教学的桥梁与纽带

教育部发布的《关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见》规定，“学业水平选择性考试和高等学校招生全国统一考试命题要以国家普通高中课程标准和高校人才选拔要求为依据，不再制定考试大纲，促进教、学、考相一致。”在后考试大纲时代，适应性测试就成为沟通考试和教学的桥梁与纽带。而且相比于考试大

2、适应性测试试题由教育部教育考试院依托高考评价体系命制

3、适应性测试昭示了未来高考改革的方向

4、提高考生、教师对高考命题改革新举措的适应和接受程度

本次适应性测试，试题新颖、试卷布局微调、试题难度增加，一些在正式高考不可能出现的试题都在测试卷中出现了，对中学教师和考生既是一项告知，也是一项试探，力求拓展教师和考生能够接受的底线。同时，题目难度增加，预示考生们要有心理准备。

本次四省联考反映出高考命题的趋势，更代表着以后高考命题的方向。对中学教学而言，按

理解适应性考试：回顾几篇重要文章

2024年九省联考

《中学数学教学参考》

2024年第2期(上)

开卷有益

数学科高考最重大最全面的改革

○ 本刊编辑部

1 题量全面减少

2 试题情境创新

3 思维强度增加

4 难度结构调整



九省联考后，可能不同程度地存在着……

过度解读，过度反应，过度紧张……

失去了本该有的理性思考、从容、坚定……

把九省联考卷当成模式，试图再用模式应对模式……

并一厢情愿地制造模式，而自嗨……

【教育博览】九省联考新卷结构:各地 数学模拟“后遗症”!

作者：本站编辑 2024-02-09 04:20:32

2024年高考数学适应性测试卷之变

- 一、变化的试卷结构。
- 二、变化的题目位置。
- 三、变化的知识考点。
- 四、变化的题型创新。

●以万变应万变

探索高考改革哪些在变，为什么变，会怎样变……紧跟时代潮流，与时俱进，顺势而为，方能牢牢掌握高考备考主动权。

●以不变应万变

研究高考改革哪些不变，也不能变，为什么不能变，将以怎样的形式表达不变……坚持以不变应万变。

2024年高考数学适应性测试卷之不变

- 一、不变的素养导向。
- 二、不变的“四基”为基。
- 三、不变的改革路向。
- 四、不变的依标据本。

链接文章[2024测试卷之变之不变20240203.docx](#)



CONTENTS

目录

1

分析试卷：探寻高考数学命题趋势

2

剖析案例：探讨高考数学备考策略



一、分析试卷

探寻高考数学命题趋势

(一) 2024年九省联考变化之——①试卷结构

题型	题号	题分值	小计	合计
单选	1-8	5	40	80
多选	9-12	5	20	
填空	13-16	5	20	
解答	17	三角 数列 立几 解几	10	
	18		12	



题型	题号	题分值	小计	合计
单选	1-8	5	40	73
多选	9-11	6	18	
填空	12-14	5	15	
解答	15	函数	13	
	16	统计	15	

- 题量减少
- 多选题赋分变化
- 解答题分值增加

- 减少题量，增加解题时间，突出思维能力考查
- 解答题分数增加，突出逻辑推理过程、数学表达能力考查◇

——试卷结构变化是2024九省联考的重大变化



数学科高考最重大最全面的改革

1 题量全面减少

测试卷的题量由现行的22道题减少到19道题。
1989年实行标准化考试改革以来，数学科题量逐步增加，到1993年达到25道题的巅峰，随后一直稳定22道题，即使在老课标卷，虽然增加了选做题，但是在三道（后来是两道）题中选一道，总题量

1989-1996 理工农医类试卷结构

	1989	1990-1991	1992	1993	1994	1995	1996
总计	24	26	28	29	25	26	25
选择题	12	15	18	18	15	15	15
选择题	16	5	5	6	5	5	4
解答题	6	6	5	5	5	6	6

(一) 2024年九省联考变化之——②题目位置

(2024九省联考—15)

已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 + ax + 2$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线与直线 $2x + 3y = 0$ 垂直.

(1) 求 a ;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

(2023新 I —19)

已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, 求证: $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

(一) 2024年九省联考变化之一——②题目位置



中华人民共和国教育部

Ministry of Education of the People's Republic of China

中共中央 国务院印发《深化新时代教育评价改革总体方案》
(2020年9月)

20.深化考试招生制度改革。稳步推进中高考改革，构建引导学生德智体美劳全面发展的考试内容体系，改变相对固化的试题形式，增强试题开放性，减少死记硬背和“机械刷题”现象。加快完善初、高中学生综合素质档案建设和使用办法，逐步转变简单以考试成绩为唯一标准的招生模式。完善高等职业教育“文化素质+职业技能”考

▼ 试卷结构、题型位置摆放：把函数压轴题前移至容易题、中档题位置，出乎绝大多数人意料：意料之外，情理之中，看似平淡却有奇。正是回应了：“**改变相对固化的试题形式**”。

哪道题在哪个位置，不是固定不变的——哪道题都可以在那个位置！

——位置摆出新本身就是试卷重要创新形式之一。



(一) 2024年九省联考变化之——②题目位置

2023年 第62卷 第8期

数学通报

1

深化关键能力考查 助力创新人才选拔^①

——2023年高考数学新课标Ⅰ卷评析

赵 轩 翟嘉祺 郭淑媛

新Ⅰ卷作为高考内容改革的风向标,越来越受到老师和学生们的关注,导向作用愈发明显.



案例 高考命题创新大手笔——②题目位置

深化关键能力考查 助力创新人才选拔^①

——2023 年高考数学新课标 I 卷评析

3.3 打破固化结构,机动调整题序

与往年相比,新 I 卷的一个明显变化是调整了解答题的题序,如以往函数与导数通常是压轴题,今年把它提前到了 19 题的位置,难度显著下降;数列以往放在第 17 或 18 题,这次调整为第 20 题,难度适当增加;将概率统计与递推数列结合考查放在第 21 题,将圆锥曲线与函数和不等式有机融合作为压轴题等.通过变换试题排序,打破了固有模式,调整了较为固化的试卷结构,着力破除复习备考中题海战术和套路训练的不良影响,引导高中数学教学走出猜题押题和机械刷题的误区,把教学的重心放在培养 (下转第 15 页)

导数大题多年以来作为压轴题,是高考的重难点之一,令许多考生谈虎色变.今年的导数题回归高中学习导数的初衷,在试题顺序上放到第 19 题的位置,而且所考查的函数结构常见,设问方式友好,用到的构造函数和解题思路也很常规,让大多数考生都能得到不错的分数.该题的位置调整^①不仅是为了破除固有模式^②,更是要有效遏制为做好导数题学习大量高等数学知识和二级结论的风气,这对导数内容形成的高等数学知识下放的情况起到了良好的反拨作用^③,并且有助于打破“导数题是为尖子生设计的”这一固化思维,增强

(一) 2024年九省联考变化之——②题目位置

(2024九省联考—1)

样本数据16，24，14，10，20，30，12，14，40的中位数为

- A. 14 B. 16 C. 18 D. 20

(2024九省联考—2)

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，则 $a =$

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

(2024九省联考—12)

已知集合 $A = \{-2, 0, 2, 4\}$ ， $B = \{x \mid |x - 3| \leq m\}$ ，若 $A \cap B = A$ ，则 m 的最小值为_____.

第1题不再是集合了

第2题不再是复数了



(一) 2024年九省联考变化之——③知识考查

题型	题号	分值	考点	题型	题号	分值	考点
单选	1	5	统计初步——中位数的计算	填空	12	5	集 合——绝对值不等式、子集
	2	5	解析几何——离心率的计算（椭圆）		13	5	立体几何——表面积与体积
	3	5	数 列——等差中项、求n项和		14	5	不 等 式——不等式组解法，最值
	4	5	立体几何——空间平行与垂直	解答	15	13	导 数——切线、单调性、极值
	5	5	计数原理——排列问题		16	15	概率统计——概率、分布列、期望
	6	5	直线与圆——动点轨迹		17	15	立体几何——位置关系、二面角
	7	5	三角函数——三角变换		18	17	解析几何——抛物线、定点问题、面积
	8	5	解析几何——离心率的计算（双曲线）		19	17	数 论
多选	9	6	三角函数——三角函数性质				
	10	6	复 数——基本计算性质				
	11	6	函 数——抽象函数、函数性质				

(统计表来自网络)

(一) 2024年九省联考变化之——③知识考查

	2020 (山东)	2021新1	2022新1	2023新1
1	集合运算	集合运算	集合交集运算	集合运算
2	复数的运算	复数的运算	复数的概念与运算	复数的运算
3	计数 (情境应用)	空间几何体的计算	平面向量的线性运算	向量数量积
4	空间几何的计算 (情境应用)	三角函数的性质	实际问题中的空间几何体	二次函数的单调性
5	集合交并抽象运算 (情境应用)	椭圆的定义与基本不等式	古典概型	椭圆离心率
6	指对运算 (情境应用)	三角变换 (半角公式弦化切)	三角函数图象与性质	直线与圆相切
7	向量数量积	指数函数的图象与切线	构造函数比大小	等差数列
8	函数奇偶性不等式	独立事件的定义和性质	球的内接正四棱锥	三角恒等变换
9	曲线的方程	样本的数据特征	正方体中的角	样本的数据特征
10	三角函数的图象与方程	向量三角综合	用导数研究函数的性质	对数运算
11	等式与不等式	直线与圆的位置关系	抛物线	抽象函数
12	统计概率的运算	空间几何体动点	函数与导数综合 (抽象函数)	正方体与几何体的关系
13	抛物线与直线	函数奇偶性	二项式定理	排列组合
14	等差数列的公共项的和	抛物线的方程	圆与圆的位置关系	正四棱台体积
15	平面几何运算 (弧长公式)	分段函数求导求最值	用导数的几何意义研究曲线的切线	三角函数零点求参数
16	空间几何体的计算 (球)	错位相减法求和	解析几何 (椭圆)	解析几何 (双曲线离心率)
	2020 (山东)	2021新1	2022新1	2023新1
17	解三角形 (结构不良)	分段 等差数列	数列的通项、求和及数列不等式的证明	解三角形
18	等比数列	概率统计 (分布列与期望)	解三角形	立体几何
19	概率统计 (独立性检验)	解三角形	空间距离、二面角与空间向量	导数的应用
20	立几证垂直 线面角	立几证垂直 二面角求体	独立性检验与条件概率	等差数列
21	函导切线、求参数范围	双曲线与直线	解析几何 (双曲线)	概率与数列
22	椭圆与直线	函导单调性、证明不等式	导数的应用	解析几何

(统计表来自网络)

(一) 2024年九省联考变化之一——③知识考查



- 这里把第19题列在主干知识之外(是否合适?)。
- 整体相对稳定, 在正常波动范围。
- 解几、统计概率增加、立几稍有增加。
- 主干知识占比下降; 函数、三角下降, 数列下降幅度大。

就知识考查而言, 高考数学可以选择考;
就备考来说, 高考备考必须全面备。

(一) 2024年九省联考变化之——④题型创新

说2024九省联考就不能不说的故事

(2024九省—19)

离散对数在密码学中有重要的应用. 设 p 是素数, 集合 $X = \{1, 2, \dots, p-1\}$, 若 $u, v \in X$, $m \in \mathbf{N}$, 记 $u \otimes v$ 为 uv 除以 p 的余数, $u^{m, \otimes}$ 为 u^m 除以 p 的余数; 设 $a \in X$, $1, a, a^{2, \otimes}, \dots, a^{p-2, \otimes}$ 两两不同, 若 $a^{n, \otimes} = b$ ($n \in \{0, 1, \dots, p-2\}$), 则称 n 是以 a 为底 b 的离散对数, 记为 $n = \log(p)_a b$.

(1) 若 $p=11$, $a=2$, 求 $a^{p-1, \otimes}$;

(2) 对 $m_1, m_2 \in \{0, 1, \dots, p-2\}$, 记 $m_1 \oplus m_2$ 为 $m_1 + m_2$ 除以 $p-1$ 的余数 (当 $m_1 + m_2$ 能被 $p-1$ 整除时, $m_1 \oplus m_2 = 0$). 证明: $\log(p)_a (b \otimes c) = \log(p)_a b \oplus \log(p)_a c$, 其中 $b, c \in X$;

(3) 已知 $n = \log(p)_a b$. 对 $x \in X$, $k \in \{1, 2, \dots, p-2\}$, 令 $y_1 = a^{k, \otimes}$, $y_2 = x \otimes b^{k, \otimes}$. 证明: $x = y_2 \otimes y_1^{n(p-2), \otimes}$.

(一) 2024年九省联考变化之——④题型创新

说2024九省联考就不能不说的故事

- 这是一般学生所要追求的吗？——可能不！
- 什么样的学生可能做出来？
非常强的再学习能力，审题能力、抽象思维、形式化思维、逻辑推理.. 具备一定数论知识.....
- 你认同这道吗？——理解其立意，明白其方向；不接受超标考知识.....
- 2024考这种题目可能性大吗？——可能不；可能出现新情境，但出现超标考查知识可能小。
- 怎样备考这类题目？

基于学情，少数学生。不盲目拓展知识(尤其最后阶段)，更加突出学生迁移能力发展，更加突出审题教学.....

4处新定义，符号化语言，一般学生没有的数论知识.....

(一) 2024年九省联考变化之——④题型创新

(2023四省联考—22)

椭圆曲线加密算法运用于区块链.

椭圆曲线 $C = \{(x, y) | y^2 = x^3 + ax + b, 4a^3 + 27b^2 \neq 0\}$ ① $P \in C$ 关于 x 轴的对称点记为 $\tilde{P}$ ② C 在点 $P(x, y) (y \neq 0)$ 处的切线是指曲线 $y = \pm \sqrt{x^3 + ax + b}$ 在点 P 处的切线. 定义“ $\oplus$ ”运算满足:

③ ①若 $P \in C, Q \in C$, 且直线 PQ 与 C 有第三个交点 R , 则 $P \oplus Q = \tilde{R}$;

②若 $P \in C, Q \in C$, 且 PQ 为 C 的切线, 切点为 P , 则 $P \oplus Q = \tilde{P}$;

③若 $P \in C$, 规定 $P \oplus \tilde{P} = 0^*$, 且 $P \oplus 0^* = 0^* \oplus P = P$.

(1) 当 $4a^3 + 27b^2 = 0$ 时, 讨论函数 $h(x) = x^3 + ax + b$ 零点的个数;

(2) 已知“ $\oplus$ ”运算满足交换律、结合律, 若 $P \in C, Q \in C$, 且 PQ 为 C 的切线, 切点为 P , 证

④ 明: $P \oplus P = \tilde{Q}$;

(3) 已知 $P(x_1, y_1) \in C, Q(x_2, y_2) \in C$, 且直线 PQ 与 C 有第三个交点, 求 $P \oplus Q$ 的坐标.

参考公式: $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$.

(一) 2024年九省联考变化之——④题型创新

- 这是考的椭圆(解析几何)吗? ——显然不!, 这是一道函数题。
- 知识背景: 三次函数、函数的导数, 方程.....这些是学生所比较熟悉的
- 题目难在哪里? 形式化的语言, 即时定义(4个), 符号表达.....
- 什么样的学生可能做得出来?

再学习能力、逻辑推理能力、创新创造能力.....

- 这是一般学生所要刻意追求的吗? ——可能不是。
- 怎样备考这类题目?

基于学情, 教能教的, 不针对其内容, 而理解为开放创新情景: 只能教审题、化化、转化, 而难以做到针对具体题型.....

(一) 2024年九省联考变化之——④题型创新

解答题统计分析

		适应性考试			新高考卷 I		
		2021	2023	2024	2021	2022	2023
结构		8+4+4+6	8+4+4+6	8+3+3+5	8+4+4+6	8+4+4+6	8+4+4+6
新题	题号	21	22	19		20	
	特征	新定义2个	新定义3个	新定义4个		新定义1个	
	知识	立几	函数导数	数论(超)		统计概率	
阅读(字数)		1720	2421	1299	1581	1332	1289
主干知识解答题		6	6	4	6	6	6
整体难度		难	较难	易	一般	难	一般
难题		21, 22	22	19	20, 22	22	22

一定意义下，相对而言：
2024九省联考与2023新 I 较近，距2021八省联考、2023四省联考、2022新 I 较远。

(一) 2024年九省联考变化之——⑤问题情境设计

- 《中国高考评价体系说明》：情境问题情境，指的是真实的问题情境，是以问题或任务为中心构成的活动场域。情境活动是指人们在情境中所进行的解决问题的或完成任务的活动。
- 《普通高中数学课程标准为(2017年版) “高考命题建议”：应有一定数量的应用题，还应包括开放性和探究性问题；在命题中，选择合适的问题情境是考查数学学科核心素养的重要载体。
- 有文献指出：高考命题“无情境，不命题”。

●高考数学试题的呈现方式：

以连续文本(由文字与符号组成的陈述句段) 或混合文本(由连续文本和图表、图形等非连续文本共同组成的单篇文本)。

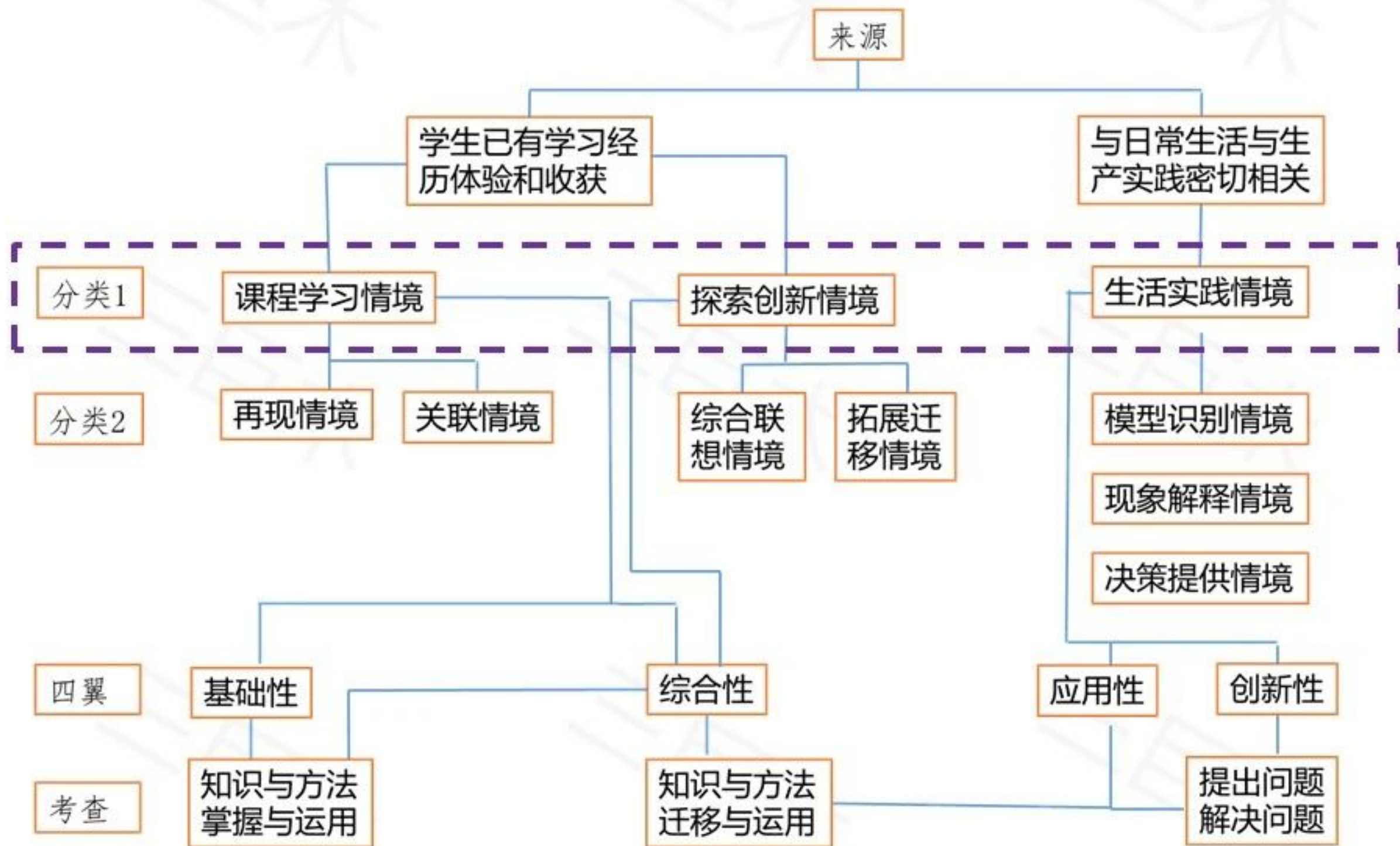
●高考数学情境：

以连续文本或混合文本形式呈现的、为命制情境化试题所选取的情境化材料，是学生进行情境活动的活动场域。

——柯跃海. 高考数学试题情境的创设实践, 《中国考试》2020. 6



高考数学命题情境框架





高考数学新高考卷情境题统计(含排列组合)

年份	适应性考试	新高考卷	生活实践情境			合计
			优秀文化	科技进步	生活生产	
2020	2020二省联考				3	3
		2020新 I	1	1	5	7
		2020新 II		1	5	6
2021	2021八省联考			1	1	2
		2021新 I	1	1	1	3
		2021新 II	1	1	1	3
2022		2022新 I			2	2
		2022新 II	1		1	2
2023	2023四省联考		2	1	4	7
		2023新 I		1	3	4
		2023新 II		1	2	3
2024	2023九省联考				2	2

高考数学江苏卷(2008-2020)简单回顾

●江苏2008模式沿袭13年之久(2008—2020)。

●数学试卷结构：必做内容160分(全体考生)、附加题40分(物理方向考生)。

必做内容考查：必修1-5，选修1-1, 1-2。

附加题考查：选修4系列(矩阵、参数方程、不等式、几何证明)4选2+选修2-2不包含选修1-1, 1-2的部分。

题号	必做题(160分, 120分钟)			附加题(40分, 30分钟)		
	1—14	15—17	18—20	21A, B, C, D	22	23
题型	填空题	解答题	解答题	解答题	解答题	解答题
分值	$5 \times 14 = 70$	$14 \times 3 = 42$	$16 \times 3 = 48$	$10 \times 2 = 20$	10	10
内容		三角、立几、应用题、解几、 函数、数列		四选二	概率 抛物线 空间向量	不限

●解答题考查知识一般顺序是三角、立几、应用题、解几、函数、数列)。

●其中应用题与解几题常在中档题位置，起到重要分水岭作用，是复习的重要内容。

●应用题：考查数学建模、运用数学知识分析与解决问题的能力。



高考数学江苏卷(2008-2020)回顾(应用题)

年份	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
题号	17	19	17	17	17	18	18	17	17	18	17	18	17
知识	三角函数 导数	函数概念 基本不等式	解三角形 基本不等式 导数	三次函数 导数 立体几何	函数方程 基本不等式	正余弦定理 二次函数 三角函数	直线方程 直线与圆 位置关系 解三角形	函数概念 导数 几何意义	函数概念 导数 应用 棱柱 棱锥	正棱柱 正棱台 正余弦定理	三角函数 导数	三角函数 解方程 直线与圆	函数性质 用导数求最值 解方程
情境与问题	费马点 水管材料最省	生产成本 满意度最大	高度测量 角度较大	包装盒设计 容积最大	弹道轨迹 范围	游客上下山 道路选择	古桥保护区 面积最大	山区公路设计 最短	仓库设计 容积最大	玻璃棒放入容器 长度	组合图形 产值最大	环境建设 距离最短	山谷建桥 造价最低

- 应用题是衡量试卷水平的重要指标，应用题精彩则满盘皆活。应用题事实上处于核心位置。
- 虽然要统筹整套试卷考查知识分布，但应用题情境优先考虑。这有无可能是命题的一个方向？

(一) 2024年九省联考变化之——⑥多考想少考算

深化关键能力考查 助力创新人才选拔^①

——2023 年高考数学新课标 I 卷评析

3.1 突出思维品质,减少繁难运算

新 I 卷非常明显地展现出了“多想少算”的考查理念,尤其是在选择题和填空题上,较大程度避免了繁难运算,通过简化计算量,让学生能够有充分的时间进行思考,这也是今后高考数学将坚持的改革方向。运算能力固然是非常重要的能力,

但不应成为高考数学中优先考查的能力。数学科应当发挥学科特点,突出思维能力考查,注重对良好思维品质的培养。出于高考在考试时间和考试形式上的限制,要避免使学生因花费大量时间在运算上而失去展现思维水平的机会,应当合理控

个人观点: 不照单全收, 要有所批判地理解、应用.....

(一) 2024年九省联考变化之——⑥多考想少考算

(2024九省联考—3)

记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 + a_7 = 6$, $a_{12} = 17$, 则 $S_{16} =$

- A. 120 B. 140 C. 160 D. 180

(2024九省联考—6)

已知 Q 为直线 $l: x + 2y + 1 = 0$ 上的动点, 点 P 满足 $\overrightarrow{QP} = (1, -3)$, 记 P 的轨迹为 E , 则

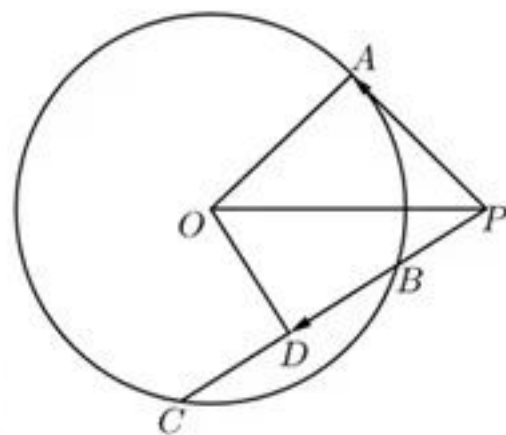
- A. E 是一个半径为 $\sqrt{5}$ 的圆 B. E 是一条与 l 相交的直线
C. E 上的点到 l 的距离均为 $\sqrt{5}$ D. E 是两条平行直线

平移变换?

(2023乙理—12)

12、已知 $\odot O$ 的半径为 1, 直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A , 直线 PB 与 $\odot O$ 交于 B, C 两点, D 为 BC 的中点, 若 $|PO| = \sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ C. $1+\sqrt{2}$ D. $2+\sqrt{2}$



$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} \leq [\overrightarrow{PA}] [\overrightarrow{PD}] = [\overrightarrow{PD}] \leq [PO] = \sqrt{2}$$



(一) 2024年九省联考变化之——⑥多考想少考算

(2024九省联考—10)

已知复数 z , w 均不为 0, 则

A. $z^2 = |z|^2$

B. $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2}$

C. $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$

D. $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$

(2021八省联考—10)

设 z_1, z_2, z_3 为复数, $z_1 \neq 0$. 下列命题中正确的是

A. 若 $|z_2| = |z_3|$, 则 $z_2 = \pm z_3$ B. 若 $z_1 z_2 = z_1 z_3$, 则 $z_2 = z_3$

C. 若 $\bar{z}_2 = z_3$, 则 $|z_1 z_2| = |z_1 z_3|$ D. 若 $z_1 z_2 = |z_1|^2$, 则 $z_1 = z_2$

- 学生的直觉思维?
- 复数的三角形式要不要教?
- 课本中选学内容要不要教?

.....

(一) 2024年九省联考变化之——⑥多考想少考算

(2024九省联考—8)

设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过坐标原点的直线与 C 交于 A, B 两点, $|F_1B| = 2|F_1A|$, $\overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 4a^2$, 则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{7}$

(2023新 I —16)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 A 在 C 上, 点 B 在 y 轴上, $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 则 C 的离心率为_____.

●情境相似, 难度相当, 思路相同.....

运算：数学的童子功——永远没有过头一说

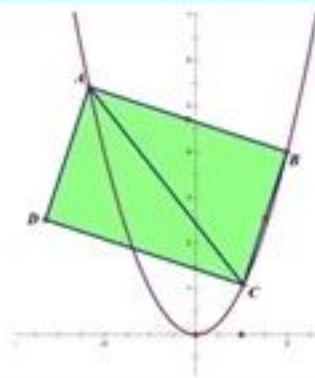
(2023新 I —22)

在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0, \frac{1}{2})$ 的距离，记动点 P 的轨迹

为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.



- ①设斜率+设一点(另外两点用它们表示)
- ②设两点(第三点用这两点表示)
- ③设三点(寻找关系)
- ④用参数方程
-

本质
是两元

去绝对值
放缩

一元
变量

运算. 高考重要区分度之一, 最无可争议。运算能力成为能否得更高分数的分水岭。
2023新 I —22难在不等式运算(放缩), 这种解几题中的运算考查有一定新意

初中

(一) 2024年九省联考变化之——⑦很少给图

序号	试卷名称	题量	涉及图形题号	数量	给图题号
1	2023 新 I	22	1~6, 11, 12, 14~16, 17~19, 22	15	1
2	2023 新 II	22	1, 4~6, 9~11, 14~17, 19~22	15	3
3	2023 甲(理)	23	2, 4, 8, 10~16, 18, 20~23	15	1
4	2023 乙(理)	23	1~6, 8, 9, 11~14, 16, 18~23	18	2
5	2024九省	19	2, 4, 6, 8~13, 15, 17, 18	12	1

- 有些是基于知识背景，比较简单的问题可以不画图，如2023新 I 第5题。
- 有些则几乎必须要画出图形(草图)，借助图形探索解题思路，然后才能进行代数推理，例如，2023乙第12题，解题似乎应当根据题意画出图形，借助图形进行探索，然后建立模型，并对模型求解。
- 有些则是画出示意图，或“胸中有图”，在图形的引领下展开探索。

(二) 关注教育部考试院的两次问卷调查

① 高考内容改革问卷调查

高考内容改革问卷调查

教育部教育考试院 2023-12-27 17:20
发表于北京 48人听过

1/1

★

为了解高中一线教学实际、推进高考内容改革、做好高考命题工作，教育部教育考试院组织了此次问卷调查，分别面向高中一线教师和高中生进行调研。欢迎广大高中一线师生作答！

高中教师版

高考内容改革问卷调查（教师版）二维码

高考内容改革问卷调查
教师版

尊敬的老师，这是教育部教育考试院针对高考各学科内容改革开展的一项问卷调查工作，所有数据将收回并进行分析，请认真填写，感谢您的配合。



高中学生版

高考内容改革问卷调查（学生版）二维码

高考内容改革问卷调查
学生版

亲爱的同学，这是教育部教育考试院针对高考各学科内容改革开展的一项问卷调查工作，所有数据将收回并进行分析，请认真填写，感谢你的配合。

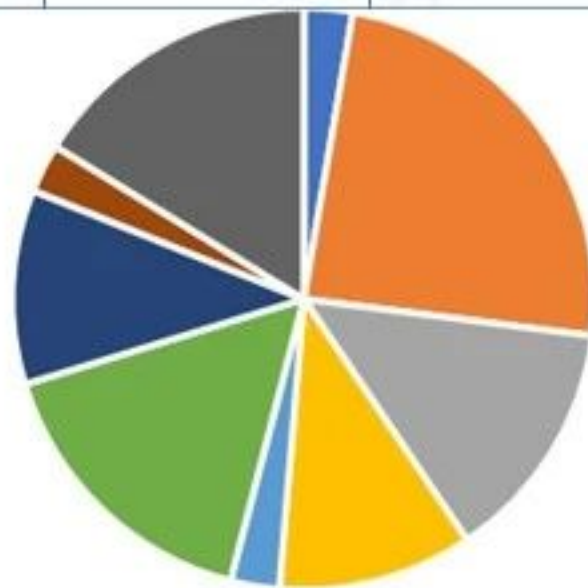


链接[高考内容改革调查问卷.pdf](#)

(二) 关注教育部考试院的两次问卷调查

① 高考内容改革问卷调查

问题	价值引领	2023难度	选拔功能	问题情境	计算量	试卷结构	引导教学	反固化顺序	命题改革
题号	4	5, 12, 13①~⑥, 17	6, 11, 19, 21, 22	7, 8, 9, 23	16	18 ①~⑤	24~26, 28	27	20, 29 ①~⑤
小计	1	9	5	4	1	5	3	1	7



■ 价值引领 ■ 2023难度 ■ 选拔功能 ■ 问题情境 ■ 计算量
■ 试卷结构 ■ 引导教学 ■ 反固化 ■ 命题改革

(二) 关注教育部考试院的两次问卷调查

②2024九省联考数学问卷调查

2024年高考综合改革适应性测试：
数学试题及问卷调查

来源：中国考试 中国考试 2024-05-19 10:18
发布于北京，已144人阅读



背景图：2024年，吉林、黑龙江、安徽、江西、广西、贵州、甘肃等第四批高考综合改革省份将参加高考。为实施平稳过渡，相关省份组织了适应性测试。数学科适应性测试题由教育部教育考试院依据高校人才选拔要求和《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》编制，可供依据《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》教学，使用高考全国卷的省份参考借鉴。

试题后附有教师版、学生版调查问卷，欢迎广大师生填写并反馈意见。

高考数学适应性测试问卷调查

教师版

尊敬的老师，这是教育部教育考试院针对2024年高考数学适应性测试题开展的一项问卷调查工作，所有数据将收回并进行分析，请认真填写，感谢您的配合。



高考数学适应性测试问卷调查

学生版

亲爱的同学，这是教育部教育考试院针对2024年高考数学适应性测试题开展的一项问卷调查工作，所有数据将收回并进行分析，请认真填写，感谢你的配合。



链接[2024九省联考数学问卷调查.docx](#)

(二) 关注教育部考试院的两次问卷调查

②2024九省联考数学问卷调查

问题类别	难度	区分度	减少题量	赋分调整	思维能力考查
题号	3	4, 14	5~10	11, 12	13
小计	1	2	6	2	1



■ 难度 ■ 区分度 ■ 减少题量 ■ 赋分调整 ■ 思维能力考查



(三) 未来高考数学命题趋势分析

——姑妄言之，姑妄听之，一笑了之

温故而知新。但如果我们不站在更高层面去理解2024年九省联考数学卷、把握高考数学命题改革的方向，而是机械地、形式化地、拘泥于题目层面的，认为2024年九省联考数学卷是未来命题的样板，进而在后续的，特别是2024年高考数学备考中，机械模仿，题型训练，我们可能会再度重蹈“慢一拍”的覆辙。

- 九省联考数学卷是2024高考的样板吗？
- 2024年高考数学新高考卷该有的模样是怎样的？

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——①顶层设计文件

①



中华人民共和国教育部
Ministry of Education of the People's Republic of China

当前位置: 首页 > 公开

中共中央 国务院印发《深化新时代教育评价改革总体方案》
(2020年9月)

20.深化考试招生制度改革。稳步推进中高考改革，构建引导学生德智体美劳全面发展的考试内容体系，改变相对固化的试题形式，增强试题开放性，减少死记硬背和“机械刷题”现象。加快完善初、高中学生综合素质档案建设和使用办法，逐步转变简单以考试成绩为唯一标准的招生模式。完善高等职业教育“文化素质+职业技能”考

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——①顶层设计文件

②

国务院办公厅 关于新时代推进普通高中育人方式改革的 指导意见

(国办发〔2019〕29号)(2019年6月)

(十五) 深化考试命题改革。学业水平选择性考试与高等学校招生全国统一考试命题要以普通高中课程标准和高校人才选拔要求为依据，实施普通高中新课程的省份不再制定考试大纲。优化考试内容，突出立德树人导向，重点考查学生运用所学知识分析问题和解决问题的能力。创新试题形式，加强情境设计，注重联系社会生活实际，增加综合性、开放性、应用性、探究性试题。科学设置试题难度，命题要符合相应学业质量标准，体现不同考试功能。加强命题能力建设，优化命题人员结构，加快题库建设，建立命题评估制度，提高命题质量。

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——①顶层设计文件

③



教育部关于做好2022年普通高校 招生工作的通知

三、关于深化考试内容改革：

2021年：高考命题要坚持立德树人，加强对学
生德智体美劳全面发展的考查和引导。要优化情
境设计，增强试题开放性、灵活性，充分发挥高
考命题的育人功能和积极导向作用，引导减少死
记硬背和“机械刷题”现象。各地要加强国家教育
考试工作队伍建设，完善教师参与命题和考务工
作的激励机制，提升国家教育考试队伍能力和水
平。

2022年：高考命题**坚持以习近平新时代中国特
色社会主义思想为指导**，贯彻党的教育方针，落
实立德树人根本任务，充分发挥高考命题的育人
功能和积极导向作用，**构建引导学生德智体美劳
全面发展的考试内容体系。依据高校人才选拔要
求和国家课程标准，优化试题呈现方式，加强对
关键能力和学科素养的考查**，引导减少死记硬背
和“机械刷题”现象。各地要加强国家教育考试工
作队伍建设，完善工作激励保障机制，提升国家
教育考试队伍能力和水平。

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——①顶层设计文件

③



【参考答案】思维品质，实质是人的思维的个性特征。思维品质反映了不同个体智力或思维水平的差异，主要包括深刻性、灵活性、独创性、批判性和敏捷性五个方面。

8.持续深化考试内容改革。高考命题坚持以习近平新时代中国特色社会主义思想，落实立德树人根本任务，服务人才培养质量提升和现代化建设人才选拔，引导学生德智体美劳全面发展。高考命题体现基础性、综合性、应用性和创新性，注重考查关键能力、学科素养和思维品质，注重考查学生对所学知识的融会贯通和灵活运用。持续加强国家教育考试命题和考务工作队伍建设，强化规范管理，完善保障机制，提升工作水平。

教学〔2023〕1号

注意：删除“引导减少死记硬背和‘机械刷题’现象”表述，增加“融会贯通和灵活应用”

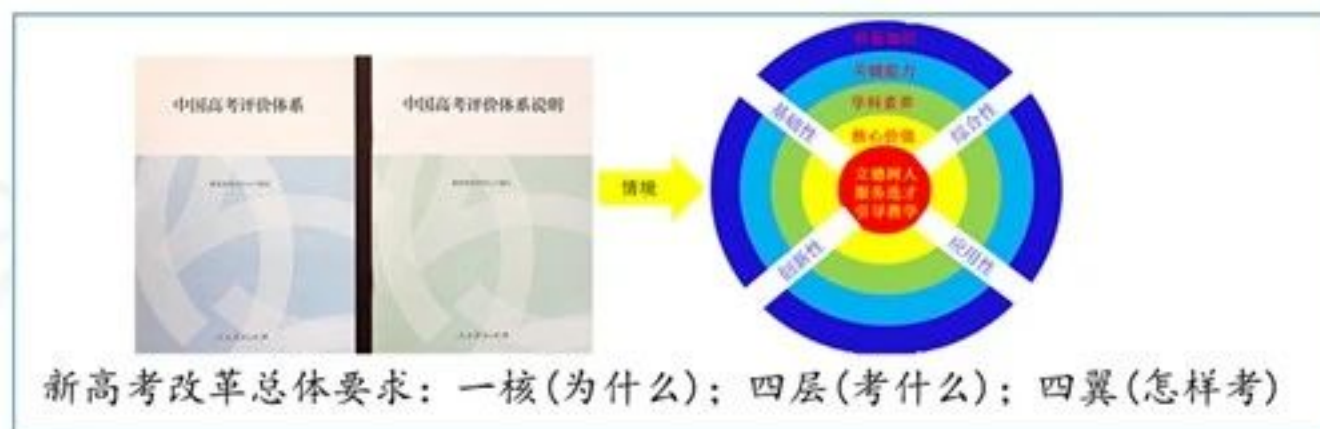
(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——①顶层设计文件

④



教育部考试中心发布《中国高考评价体系》

将立德树人融入考试评价全过程 联通“招—考—教—学”全流程



字少：《中国高考评价体系》22000 字、《中国高考评价体系说明》29000 字。

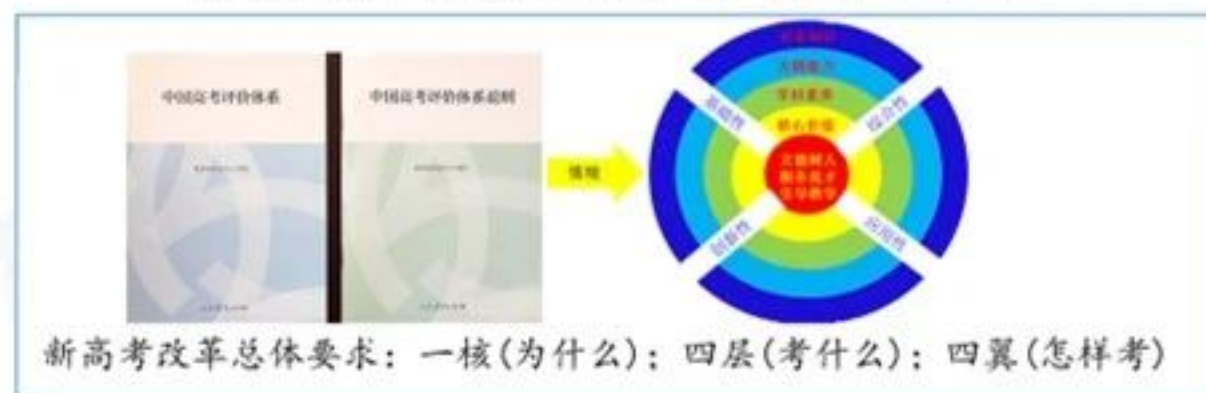
事大：中国高考评价体系是新时代**高考内容改革**的基础工程、理论支撑和实践指南，是深化高中育人方式改革的助推器，是提升高考治理能力的重要基础，是命题评价的准绳和量尺。

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——①顶层设计文件



教育部考试中心发布《中国高考评价体系》

将立德树人融入考试评价全过程 联通“招—考—教—学”全流程



一核：即高考核心功能：立德树人，服务选材，引导教学。

四层：即高考考查内容：核心价值，学科素养，关键能力，必备知识。

四翼：即高考考查要求：基础性，综合性，应用性，创新性。

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——①顶层设计文件

核心价值(政治立场和思想观念, 世界观和方法论, 道德品质和综合素质)



依托学科素养考查而考查

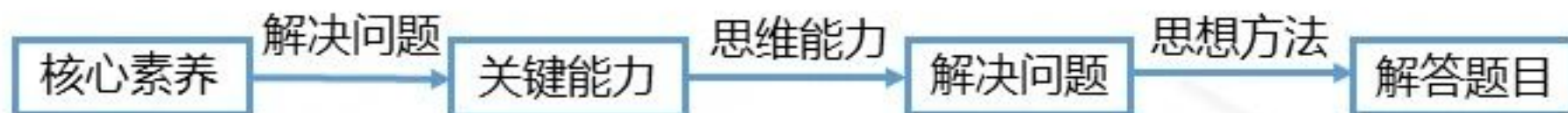
学科素养(学习掌握, 实践探索, 思维方法)



外显形式

关键能力(面对生活实践或学习探索问题情境时, 高质量地认识问题、分析问题、解决问题的能力)

体现在运用知识解决问题



必备知识(面对与学科相关的生活实践或学习探索问题情境时, 高质量地认识问题、分析问题、解决问题所必须具备的知识)

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——①顶层设计文件

⑤ **必备知识**(面对与学科相关的生活实践或学习探索问题情境时, 高质量地认识问题、分析问题、解决问题所必须具备的知识)

根据《普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)》[17], 确定数学必备知识系统由 18 个知识模块和 68 个知识组块构成; 每个知识组块由若干概念、原理、事实等知识点构成; 一个知识点就是一个概念或者一个原理或者一个事实. 数学必备知识的认知要求分为心理意义和操作运用两类.[18] 数学必备知识的 心理意义 有两个层次, 了解: 能回忆出知识的言语信息; 能辨认出知识的常见例证;

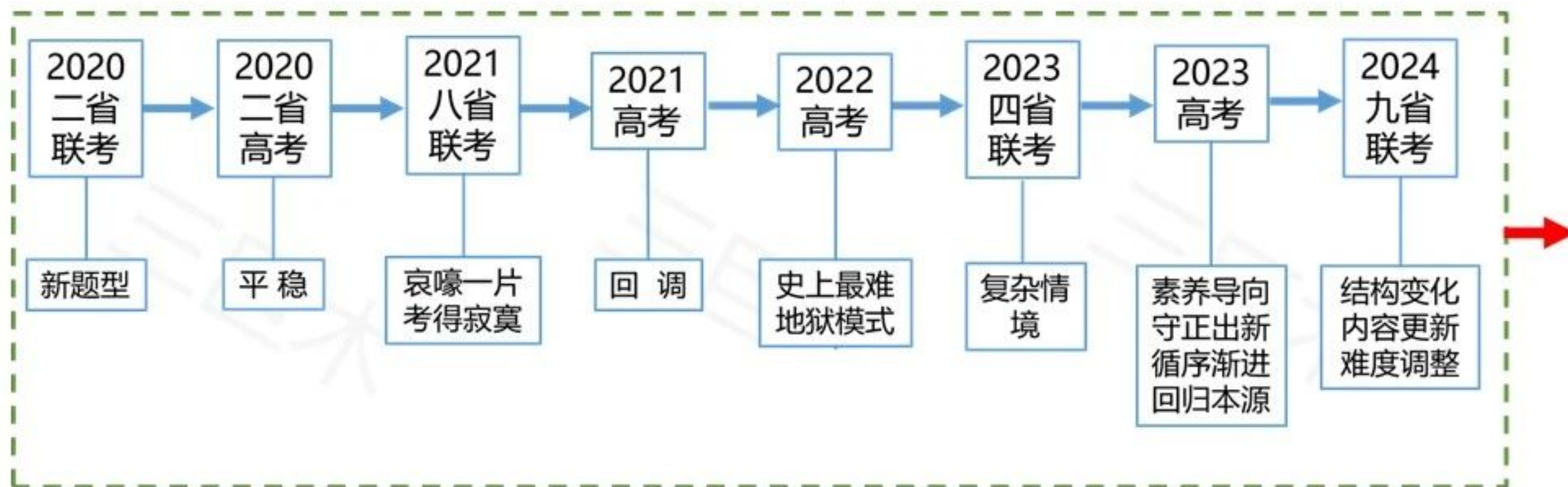
会举例说明知识的相关属性. 理解: 能把握知识的本质属性; 能与相关知识建立联系; 能区别知识的例证与反例. 数学必备知识的操作运用有两个层次, 掌握: 在理解的基础上, 能直接把知识运用于新的情境. 综合运用: 能综合运用知识解决问题. 以必备知识中的知识组块或者是其中的概念、原理知识点为列的内容, 以了解、理解、掌握、综合运用为行的内容,

—— 何小亚教授: 高考数学命题系统的构建与运用

必备知识：18个模块和68知识组块（何小亚教授）

模块	组块
集合	集合的概念与表示、集合的基本关系、集合的基本运算.
常用逻辑用语	必要条件、充分条件、充要条件、全称量词与存在量词、全称量词命题与存在量词命题的否定.
相等关系与不等关系	等式与不等式的性质、基本不等式.
从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式	从函数观点看一元二次方程、从函数观点看一元二次不等式.
函数概念与性质	函数概念、函数性质.
幂函数、指数函数、对数函数	概念、性质和应用.
三角函数	角与弧度、三角函数概念和性质、同角三角函数的基本关系式、三角恒等变换、三角函数应用.
函数应用	二分法与求方程近似解、函数与数学模型.
平面向量及其应用	向量概念、向量运算、向量基本定理及坐标表示、向量应用.
复数	复数的概念、复数的运算、复数的三角表示.
立体几何初步	基本立体图形：柱、雉、台、球及简单组合体的概念及表面积和体积的计算点线面位置关系； 4个公理、5个性质定理、4个判定定理.
概率	随机事件与概率、随机事件的独立性、随机事件的条件概率、离散型随机变量及其分布列、正态分布.
统计	获取数据的基本途径及相关概念、抽样、统计图表、本用样估计总体、成对数据的统计相关性、一元线性回归模型、 2×2 列联表.
数列	数列概念、等差数列、等比数列.
二元函数导数及其应用	导数概念及其意义、导数运算、导数在研究函数中的应用.
空间向量与立体几何	空间直角坐标系、空间向量及其运算、向量基本定理及坐标表示、空间向量的应用.
平面解析几何	直线与方程、圆与方程、圆锥曲线（椭圆、抛物线、双曲线）与方程.
计数原理	两个基本计数原理、排列与组合、二项式定理.

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——②整体回顾





(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——③难度视角

	题 号	分 数	占比重
容易题	1~4,10, 12,15	44	0.29
中档题	5~7,9, 11,13,16,17,18(1)	70	0.47
难题	8,14, 18(2),19	36	0.24



(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——③难度视角

相同题号位置比较

(2024九省—7,8)

已知 $\theta \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$, $\tan 2\theta = -4 \tan(\theta + \frac{\pi}{4})$, 则 $\frac{1 + \sin 2\theta}{2 \cos^2 \theta + \sin 2\theta} =$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过坐标原点的直线与 C 交于 A, B 两点, $|F_1B| = 2|F_1A|$, $\overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{F_2B} = 4a^2$, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$

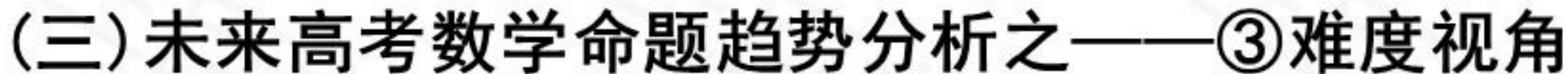
(2023新 I —7,8)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) =$ ().

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$



(2023四省—7,8)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 的导函数存在, 且 $f'(x) < g'(x)$, 则当 $x \in (a, b)$ 时

- A. $f(x) < g(x)$ B. $f(x) > g(x)$
C. $f(x) + g(a) < g(x) + f(a)$ D. $f(x) + g(b) < g(x) + f(b)$

已知 a, b, c 满足 $a = \log_5(2^b + 3^b)$, $c = \log_3(5^b - 2^b)$, 则

- A. $|a-c| \geq |b-c|$, $|a-b| \geq |b-c|$
- B. $|a-c| \geq |b-c|$, $|a-b| \leq |b-c|$
- C. $|a-c| \leq |b-c|$, $|a-b| \geq |b-c|$
- D. $|a-c| \leq |b-c|$, $|a-b| \leq |b-c|$

(2022新 I —7,8)

设 $a=0.1e^{0.1}$, $b=\frac{1}{9}$, $c=-\ln 0.9$, 则

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

已知正四棱锥的侧棱长为 l ,其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π ,且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$,

则该正四棱锥体积的取值范围是

- A. $[18, \frac{81}{4}]$ B. $[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}]$ C. $[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}]$ D. $[18, 27]$



(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——③难度视角

相似
题型
比较

(2024九省—11)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(\frac{1}{2}) \neq 0$ ，若 $f(x+y) + f(x)f(y) = 4xy$ ，则

A. $f(-\frac{1}{2}) = 0$

B. $f(\frac{1}{2}) = -2$

C. 函数 $f(x - \frac{1}{2})$ 是偶函数

D. 函数 $f(x + \frac{1}{2})$ 是减函数

(2023新 I —11)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$ ，则 ().

A. $f(0) = 0$

B. $f(1) = 0$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(2022新 I —12)

已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$ ，记 $g(x) = f'(x)$ ，若 $f(\frac{3}{2} - 2x)$ ， $g(2+x)$ 均为偶函数，则

A. $f(0) = 0$

B. $g(-\frac{1}{2}) = 0$

C. $f(-1) = f(4)$

D. $g(-1) = g(2)$



(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——③难度视角

相近考查内容比较

(2024九省—16)

盒中有标记数字1, 2, 3, 4的小球各2个, 随机一次取出3个小球.

- (1) 求取出的3个小球上的数字两两不同的概率;
- (2) 记取出的3个小球上的最小数字为 X , 求 X 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

(2022新 I —20)

一医疗团队为了研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了100例(称为病例组), 同时在未患该疾病的人群中随机调查了100人(称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人, A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”, B 表示事件

“选到的人患有该疾病”, $\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 与 $\frac{P(\bar{B}|A)}{P(B|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标, 记该指标为 R .

(i) 证明: $R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|B)}$

(ii) 利用该调查数据, 给出 $P(A|B)$, $P(\bar{A}|\bar{B})$ 的估计值, 并利用(i)的结果给出 R 的估计值.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828



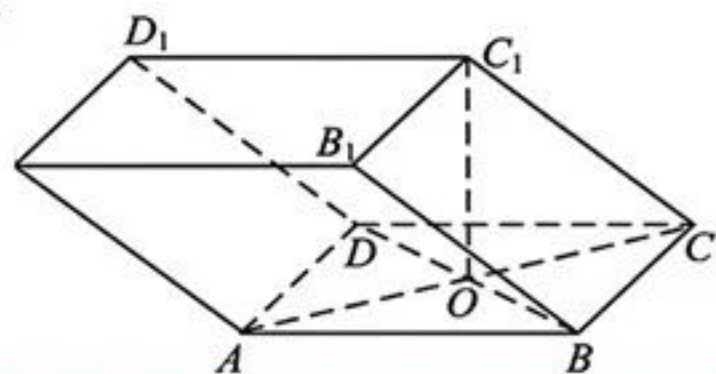
(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——③难度视角

相同主干知识考查比较

(2024九省—17)

如图, 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, O 为 AC 与 BD 的交点, $AA_1=2$, $\angle C_1CB=\angle C_1CD$, $\angle C_1CO=45^\circ$.

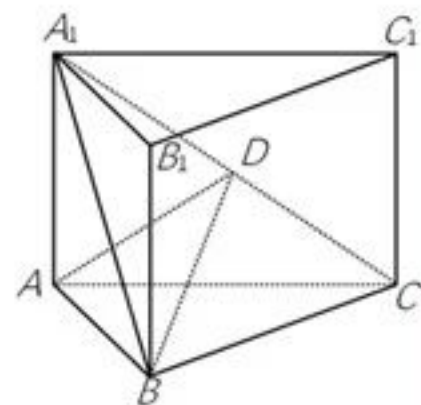
- (1) 证明: $C_1O \perp$ 平面 $ABCD$;
- (2) 求二面角 $B-AA_1-D$ 的正弦值.



(2022新 I —19)

如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

- (1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;
- (2) 设 D 为 A_1C 的中点, $AA_1=AB$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.





(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——③难度视角

相同主干知识考查比较

(2024九省—18)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过 F 的直线 l 交 C 于 A, B 两点，过 F 与 l 垂直的直线交 C 于 D, E 两点，其中 B, D 在 x 轴上方， M, N 分别为 AB, DE 的中点.

(1) 证明：直线 MN 过定点；

(2) 设 G 为直线 AE 与直线 BD 的交点，求 $\triangle GMN$ 面积的最小值.

(2022新 I —21)

已知点 $A(2, 1)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1)$ 上，直线 l 交 C 于 P, Q 两点，直线 AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率；

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$ ，求 $\triangle PAQ$ 的面积.

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——④重要文章学习

1 题量全面减少

测试卷的题量由现行的22道题减少到19道题。1989年实行标准化考试改革以来，数学科题量逐步增加，到1993年达到25道题的巅峰，随后一直稳定22道题，即使在老课标卷，虽然增加了选做题，但是在三道（后来是两道）题中选一道，总题量依然是22道题。本次改革题量减少以后，肯定不能全面覆盖考试内容，过去的老课标卷在解答题部分是三角函数和数列隔年轮流出现，而在测试卷中，三角函数和数列都没有出现，因此在解答题只有5道题的前提下，高中数学的六个重要板块不可能同时考查，以后哪一个板块没有出现在试卷中都是正常现象。但我们中学教学不要妄自总结“经验”，盲目推断某个内容可能不考，而是要全面复习各项内容，有备而战。同时题量减少以后，每道题的分值增加，解答题的重要性更是显著增加，解答时不能放弃任何一道题，要力争全部解答。

●从知识考查范围说

应该在18个知识板块、68个知识组块(何小亚教授)内选择考，超课标不应该是方向。原来是选择考，只是现在六个重要板块不可能全覆盖。

●从学生数学学习发展看重要内容

解析几何、立体几何、三角函数、函数

> 统计概率、数列、导数。

●从知识视角看

备考要全面备，底线是课标要求，适当补充二级结论。

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——④重要文章学习

1 题量全面减少

测试卷的题量由现行的22道题减少到19道题。1989年实行标准化考试改革以来，数学科题量逐步增加，到1993年达到25道题的巅峰，随后一直稳定22道题，即使在老课标卷，虽然增加了选做题，但是在三道（后来是两道）题中选一道，总题量依然是22道题。本次改革题量减少以后，肯定不能全面覆盖考试内容，过去的老课标卷在解答题部分是三角函数和数列隔年轮流出现，而在测试卷中，三角函数和数列都没有出现，因此在解答题只有5道题的前提下，高中数学的六个重要板块不可能同时考查，以后哪一个板块没有出现在试卷中都是正常现象。但我们中学教学不要妄自总结“经验”，盲目推断某个内容可能不考，而是要全面复习各项内容，有备而战。同时题量减少以后，每道题的分值增加，解答题的重要性更是显著增加，解答时不能放弃任何一道题，要力争全部解答。

● 高考选择考，备考全面备：依标据本。

● 解答题备考

更加注重答卷书写。

题目减少，分值增加，偶然性增加，风险增强。

● 从素养立意讲

突出思维能力考查，不太在乎知识应用，哪道题在哪个位置是变的，非重要板块知识也可能作为压轴题位置考查。

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——④重要文章学习

4 难度结构调整

以往的高考试题都是分题型设置压轴题，即在选择题、填空题、解答题分别设置难度较大的试题，力图发挥每种题型的选拔功能，当得到一定的基本分数后，想要取得高分，在每种题型中所付出的努力都是相对较大的，因此形成了三个或四个坡度的难度设计。但2024年测试卷基本是一个坡度的难度设计，即在单选题、多选题、填空题基本没有设置压轴题，难度都比较平缓，只在解答题设置了两道压轴题，把区分和选拔的功能都集中在最后这两道压轴题上。这就要求中学教学制订相应的针对性复习策略，对全体考生都要强调选择题、填空题的难度较低，一定要全力争取，不放过每一道题目，争取全部做对。对高水

不完全认同这个说法

- 本身有压轴题，第14题有较大难度；第11题，第8题与2023年相应位置题目比较，难度也不低。
- 相对于广大考生，这些题目正是体现重要区分度作用的关键；真正在最后两道题上区分，是“顶层”的区分。
- “顶层”区分，其基础是中档题、容易题的竞争。
- 基于学情备考，永远是第一位的。

知识不超标也可以命出精彩题——

(2014江苏卷—20)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若对任意的正整数 n , 总存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 是“ H 数列”.

- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$, 证明: $\{a_n\}$ 是“ H 数列”;
- (2) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其首项 $a_1 = 1$, 公差 $d < 0$. 若 $\{a_n\}$ 是“ H 数列”, 求 d 的值;
- (3) 证明: 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个“ H 数列” $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n + c_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)成立.

知识不超标也可以命出精彩题——

2010 年高考(广东卷)理科数学第 21 题(14 分)

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是平面直角坐标系 xOy 上的两点, 现定义由点 A 到点 B 的一种折线距离 $\rho(A, B)$ 为

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

对于平面 xOy 上给定的不同的两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

(1) 若点 $C(x, y)$ 是平面 xOy 上的点, 试证明: $\rho(A, C) + \rho(C, B) \geq \rho(A, B)$;

(2) 在平面 xOy 上是否存在点 $C(x, y)$, 同时满足

$$\textcircled{1} \rho(A, C) + \rho(C, B) = \rho(A, B); \textcircled{2} \rho(A, C) = \rho(C, B).$$

若存在, 请求出所有符合条件的点; 若不存在, 请予以证明.

这个压轴题就是笔者命制的。对当年的考生而言就是一个能真正检测其数学素养的问题. 此题已被《普通高中数学课程标准》(2017年版2020修订)作为**案例23**, 用于说明如何考查数学核心素养。

——何小亚教授:《数学高考命题和应试刷题的密战》

(三) 未来高考数学命题趋势分析之一——⑤畅想2024

九省联考卷是2024高考数学卷的样板吗？

“适应性测试昭示了未来高考改革的方向”。既然是方向，2024年高考数学就要有所反映；既然是未来，就不一定完全体现在2024年高考数学中。我们要站在更高层面去理解九省联考卷：不太在意内容变化，更加关注命题方向；不太在意试卷本身，更加看重命题立意；不太在意具体题型，更加聚焦命题思路……

莫道今年春将尽
明年春色倍还人



二、剖析案例

探讨高考数学复习策略

- 短短的几个月：需要做的可能很多，但能做的、能做到的可能非常有限了.....
- 只想当想的，只做能做的，只教当教的.....
- 做什么，怎么做，怎样做到.....



(一) 突出实效，明白还能什么

回望高考、回归本源、回到课标、回扣课本、回顾学情.....

改革是循序渐进的，创新是基于继承的.....

- 立足基础，守正固本求发展
- 依标据本，确保知识全覆盖

不仅要教怎样解，更要教怎样想；

不仅要怎样想，还要教怎样写；

不仅要谋求完整解答，还要教得到可能的步骤分；

不仅要教知识发展，更要教能力提升；

不仅要教提高能力，还要注重经验积累；

不仅要教能力提升，还要关注心理疏导；

.....

(二) 把准难度，立足学情不动摇

- 难度是肆意拔高的吗？
- 什么是教学的好样态？
- 最近发展区、先行组织者

PK

有教无类、因材施教

.....



咬定青山不放松 立根原在破岩中
千磨万击还坚劲 任尔东西南北风



开卷有益

高考数学复习教学的难度把握

○ 梁东剑 (江苏省南京市秦淮区教师发展中心 南京市高中数学梁东剑名师工作室)

文章编号: 1002-2171(2023)11-0001-01

高考数学试卷的难度,是研究的重要内容;高考复习教学的难度把握,是实施备考的重要课题。自2020年开始的高考数学新高考卷,难度可谓“冰火两重天”:从2020年高考的平稳落地,到2021年“八省联考”的“考得寂寞”,再到2021年高考的适度回调;从2022年高考的“史上最难”,到2023年“四省联考”的“复杂情境”,再到2023年高考的守正出新——春风又绿江南岸,似曾相识燕归来……高考数学试卷的难度,不能不关注;高考数学备考的难度把握,不能不上心。

就考试而言,难度可分为预期难度(考前)与实

是,那个永远不换的,也不能换的“药”是什么,在哪里,怎样给学生,学生怎样拿到,这是数学教学,包括高考复习教学,是永远值得探索的课题。

让学生都在原有的基础上得到较大发展,是教学的基本内涵,也是有效教学的应有之义,让学生“跳一跳,够得到”,应该是教学的好样态。只有突出教学的针对性,方能提高其有效性;只有强调基于学情的教学,才能突出其针对性。“最近发展区”“先行组织者”“因材施教”“有教无类”,一定意义上,可能是本质相同的。所以,面对高考数学复习教学难度的把

握,我们应做到:一是情境设置是否新颖,问题表述是否易懂,题目有无给出图形,图形画法是否常规,等等。

其次,影响整张试卷的难度,有很多要素:一是题目的难度,这是不言而喻的;二是试卷结构与题目类型,高考数学新高考卷出现的多选题、结构不良题都是一些新题型,一定意义上,新就意味着难;三是题目位置的摆放,虽然题目不变,但改变试卷布局结构,调整题目位置,也可能造成试卷难度的变化。

高考,要上好“立德树人一堂课”,做精“服务选材一把尺”,树好“引导教学一面旗”,高要改革势在必行,高者,是选择性考试,关乎千

《中学数学教学参考》

2023年第11期

教学难度空间有限的背景下(例如,临近高考备考),分析所教学生可能得分的最大增长点,例如,重点放在容易题、中档题,突出审题练习、指导学生答卷书写、关注非智力因素、重视考试经验积累、调整考生心理等。这可能比一味增大教学的绝对难度更加有意义。

在高考愈加突出情境创设,突出考查学生素养水平的大背景下,高考数学出现了较多的非数学内部情境问题。高考备考大致有两种取向:一是做加法,所谓让学生见多识广,补充一些跨学科的、丰富多彩的、包罗万象的,甚至押题猜题。二是做减法,坚持学科立场,突出学科育人

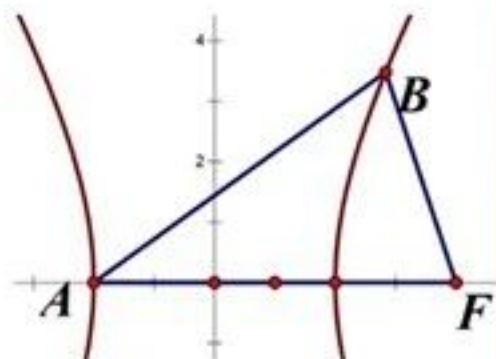
高考数学备考,我们只想当想的,只教该教的,只做能做的。问题是,我们对学情的重视足够吗?掌握得准确吗?利用得科学吗?

解析几何：确保基础分数——靠通法，走大道

2021 八省联考—21. (12 分) 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A ，右焦点为 F ，动点 B 在 C 上. 当 $BF \perp AF$ 时, $|AF| = |BF|$.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若 B 在第一象限, 证明: $\angle BFA = 2\angle BAF$.



$$\angle BFA = 2\angle BAF \Rightarrow f(\angle BFA) = f(2\angle BAF)$$

$$\textcircled{1} \quad \tan \angle BFA = \tan 2\angle BAF$$

$$\textcircled{2} \quad \sin \angle BFA = \sin 2\angle BAF$$

$$\textcircled{3} \quad \cos \angle BFA = \cos 2\angle BAF$$

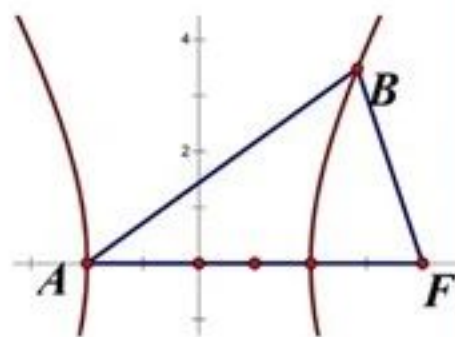


归为坐标只一条

2021 八省联考—21. (12 分) 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 动点 B 在 C 上. 当 $BF \perp AF$ 时, $|AF| = |BF|$.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若 B 在第一象限, 证明: $\angle BFA = 2\angle BAF$.



方法1. 正切(斜率)。

由(1)得 $c = 2a$, $b = \sqrt{3}a$. 设 $B(x_0, y_0)$, $x_0 > 0, y_0 > 0$, 且 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{3a^2} = 1$.

当 $x_0 \neq c$ 时, $\tan \angle BAF = \frac{y_0}{x_0 + a}$, $\tan \angle BFA = \frac{-y_0}{x_0 - c}$.

所以 $\tan 2\angle BAF = \frac{\tan \angle BAF}{1 - \tan^2 \angle BAF} = \frac{2(x_0 + a)y_0}{(x_0 + a)^2 - y_0^2} = \frac{2(x_0 + a)y_0}{-2(x_0 + a)(x_0 - a)} = \frac{-y_0}{x_0 - c}$

因此, $\tan 2\angle BAF = \tan \angle BFA$, 即 $\angle BFA = 2\angle BAF$.

当 $x_0 = c$ 时, 由已知得 $\angle BFA = 2\angle BAF$.

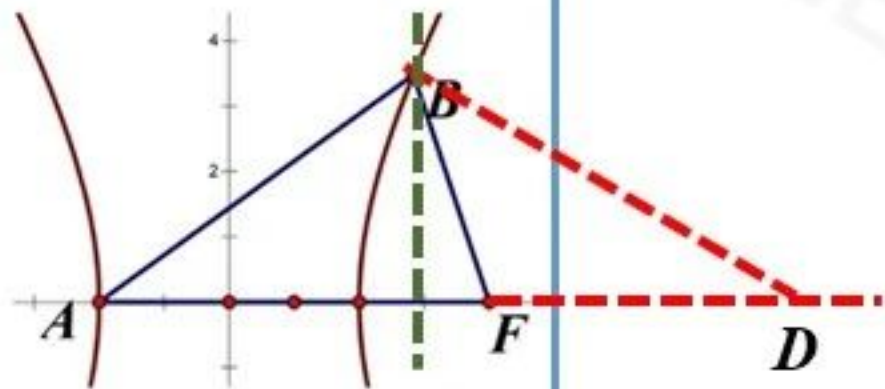


归为坐标只一条

2021 八省联考—21. (12 分) 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 动点 B 在 C 上. 当 $BF \perp AF$ 时, $|AF| = |BF|$.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若 B 在第一象限, 证明: $\angle BFA = 2\angle BAF$.



易知 $BF = 2x_0 - a$ 。

在 x 轴上作点 D (D 位于点 F 右侧), 使 $FD = BF = 2x_0 - a$, $D(2x_0 + a, 0)$ 。

可得 AD 的中点 M 的横坐标为 $\frac{2x_0 + a + (-a)}{2}$, 即 $M(x_0, 0)$ 。

因为 $B(x_0, y_0)$, 所以 $BM \perp AD$, 可得 $BA = BD$, 从而 $\angle BAF = \angle FDB$ 。

又 $\angle FDB = \angle FBD$, 所以 $\angle BFA = 2\angle BAF$ 。

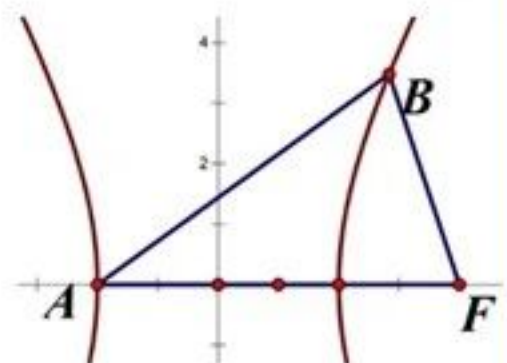
思考：方法是解决这一道题的好方法，但不是解决一类题的一般方法，更不是解决解析几何问题的一般方法——**不值得向你推荐**

什么是数学意义下的相同的题——基于思想方法引领

2021 八省联考—21. (12 分) 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 动点 B 在 C 上. 当 $BF \perp AF$ 时, $|AF| = |BF|$.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若 B 在第一象限, 证明: $\angle BFA = 2\angle BAF$.

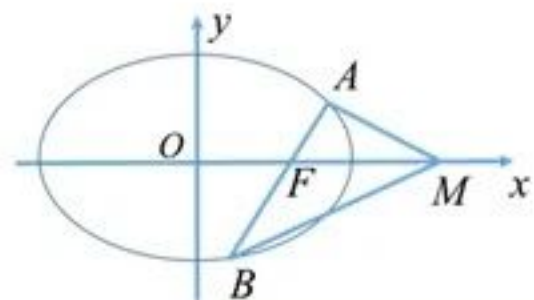


(2018全国 I 理—19)

设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 证明 $\angle OMA = \angle OMB$.



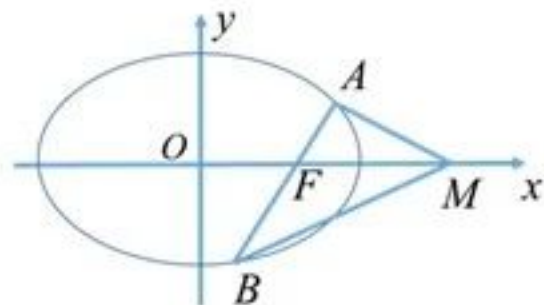


远看方知出处高

(2018全国 I 理—19)

设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

- (1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;
(2) 设 O 为坐标原点, 证明 $\angle OMA = \angle OMB$.



思路1 $\angle OMA = \angle OMB \Leftrightarrow \tan \angle OMA = \tan \angle OMB \Leftrightarrow k_{MA} + k_{MB} = 0$

$$k_{MA} + k_{MB} = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2}$$

思路2 $\angle OMA = \angle OMB \Leftrightarrow O$ (可选择) 到直线 MA, MB 距离相等

$$\frac{|2y_1|}{\sqrt{y_1^2 + (2 - x_1)^2}} = \frac{|2y_2|}{\sqrt{y_2^2 + (2 - x_2)^2}}$$



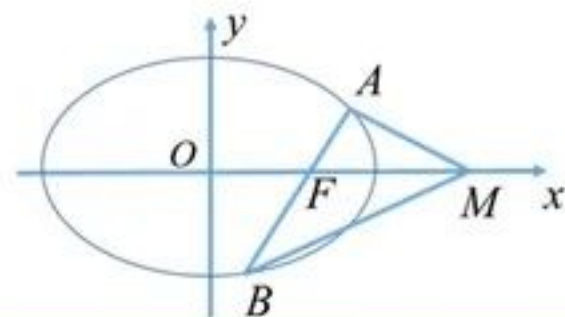
远看方知出处高

(2018全国 I 理—19)

设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 证明 $\angle OMA = \angle OMB$.



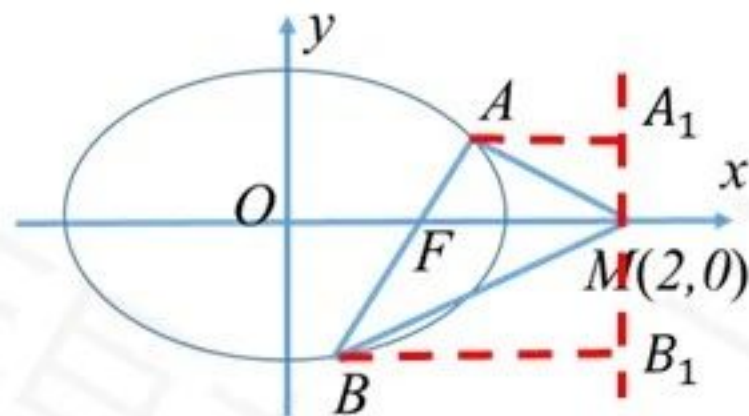
思路3 $\angle OMA = \angle OMB \Leftrightarrow \cos \angle OMA = \cos \angle OMB$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - x_1}{\sqrt{y_1^2 + (2 - x_1)^2}} = \frac{2 - x_2}{\sqrt{y_2^2 + (2 - x_2)^2}}$$

思路4 $\angle OMA = \angle OMB \Leftrightarrow \frac{FA}{MA} = \frac{FB}{MB}$ (内分定理)

思路5 第二定义 $\frac{AF}{AA_1} = \frac{BF}{BB_1} \Rightarrow \frac{AF}{BF} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1M}{MB_1}$

$$\Rightarrow Rt\triangle AA_1M \sim Rt\triangle BB_1M \Rightarrow \angle OMA = \angle OMB$$



解析几何：更进一步——指向几何性质挖掘

(2022新 I —16)

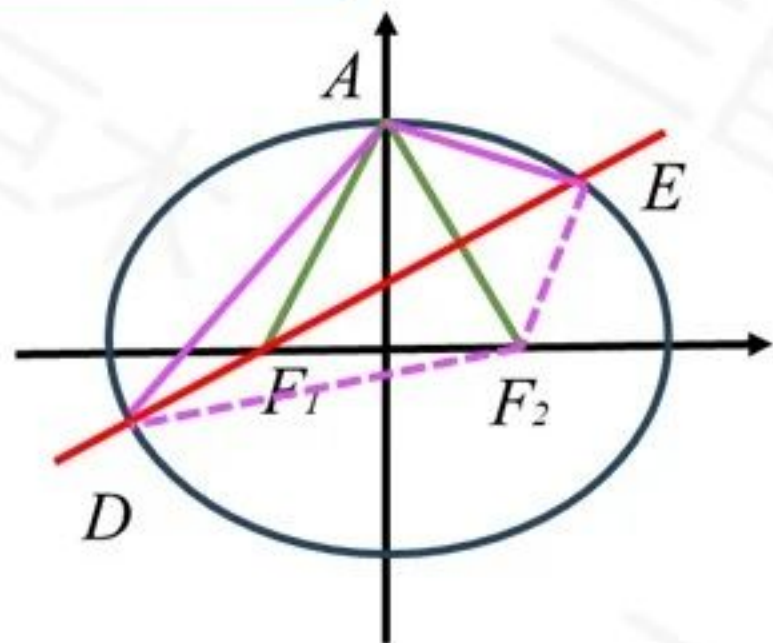
已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, C 的上顶点为 A , 两个焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$. 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点, $|DE| = 6$, 则 $\triangle ADE$ 的周长是 ▲ .

因为离心率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $\triangle AF_1F_2$ 为等边三角形, 故 A, F_2 两点关于 DE 对称, 故 $C_{\triangle ADE} =$

$$C_{\triangle F_2DE} = DF_1 + DF_2 + EF_1 + EF_2 = 4a.$$

$$DF_1 = \frac{b^2}{a - c \cos \angle DF_1F_2} = \frac{b^2}{a - \frac{\sqrt{3}}{2}c}, \quad EF_1 = \frac{b^2}{a + c \cos \angle DF_1F_2} = \frac{b^2}{a + \frac{\sqrt{3}}{2}c},$$

$$\text{故 } DE = DF_1 + EF_1 = \frac{2ab^2}{a^2 - \frac{3}{4}c^2} = \frac{2a(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}{a^2 - \frac{3}{4}(\frac{1}{2}a)^2} = \frac{24}{13}a = 6, \quad 4a = 13.$$





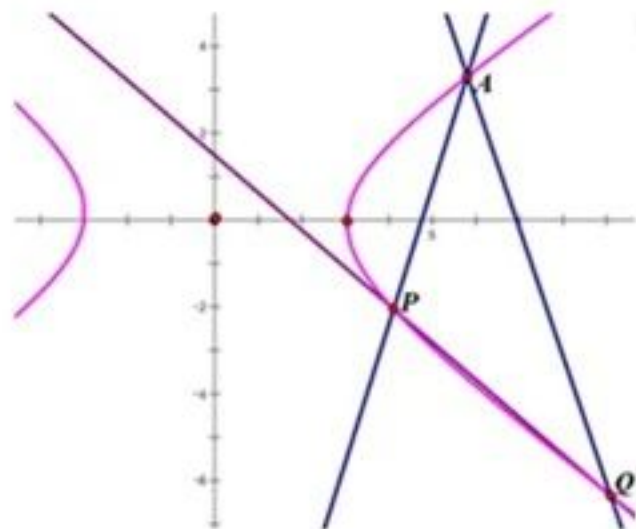
远近高低各不同

(2022新 I —21)

已知点 $A(2, 1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1 (a > 1)$ 上, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 的斜率之和为 0. $(\frac{x^2}{2} - y^2 = 1)$

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积.



$$k = \frac{y-1}{x-2}$$

求 l 斜率 —— k_{PQ} —— P, Q 变 —— k_{AP}, k_{AQ} 变 —— $k_{AP} + k_{AQ} = 0$ —— k_{AP}

$$\begin{aligned} \text{① } P(f(k), g(k)), Q(s(k), t(k)) &\longrightarrow \begin{cases} y = k(x-2) + 1 \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \\ &\longrightarrow P\left(\frac{4k^2 - 4k + 2}{2k^2 - 1}, \frac{-2k^2 + 4k - 1}{2k^2 - 1}\right), \text{ 同理 } Q\left(\frac{4k^2 + 4k + 2}{2k^2 - 1}, \frac{-2k^2 - 4k - 1}{2k^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

$$\text{② } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \longrightarrow k_{AP} + k_{AQ} = 0$$

$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow 8k^2 + 4k - 4 + 4m(k+1) = 0 \Rightarrow (k+1)(2k-1+m) = 0$$

$$\text{③ } [(x-2) + 2]^2 - 2[(y-1) + 1]^2 = 2 \dots\dots$$

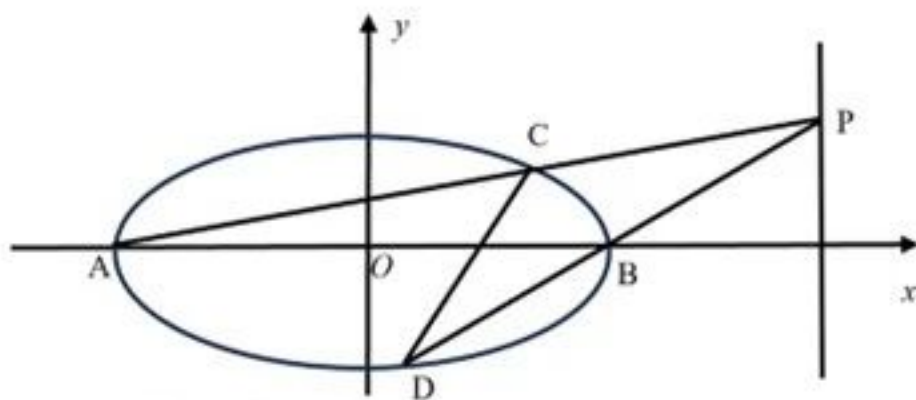


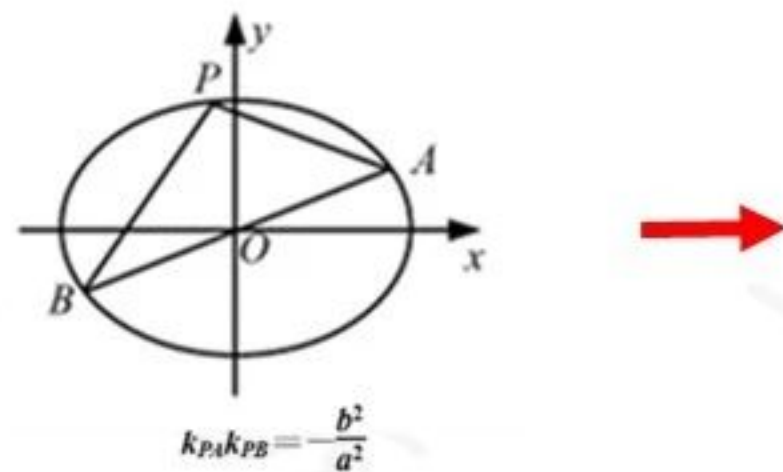
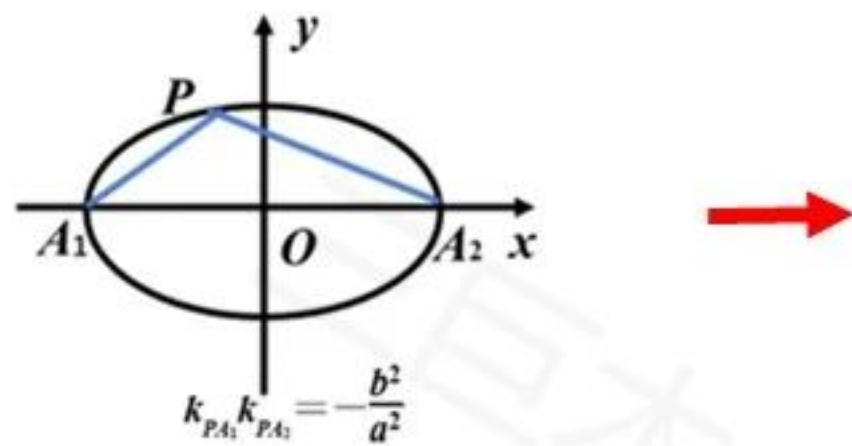
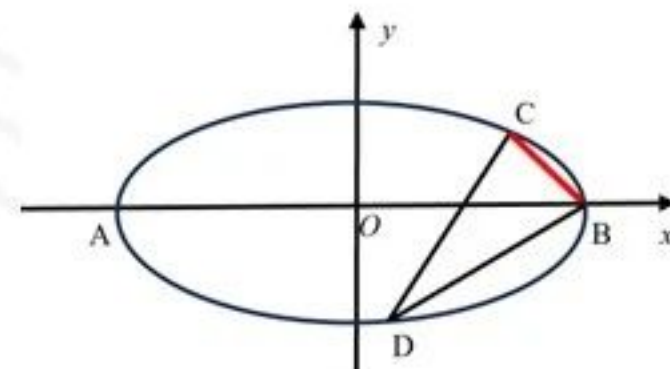
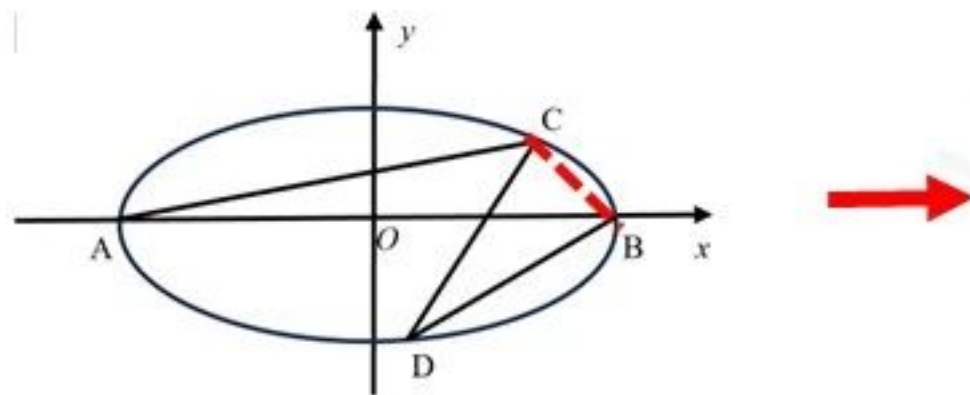
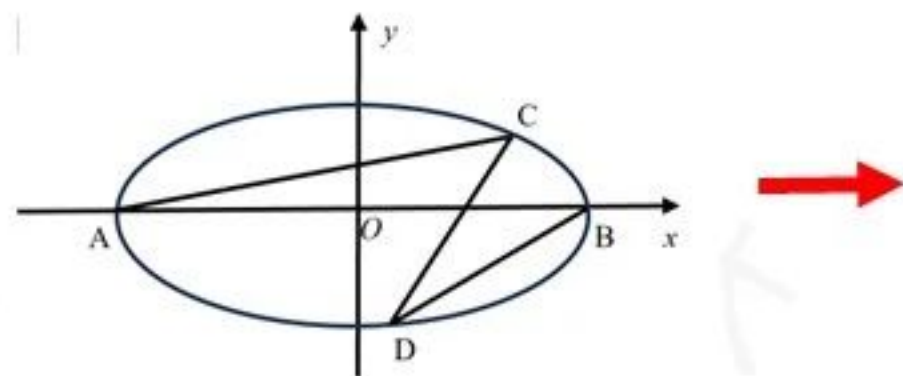
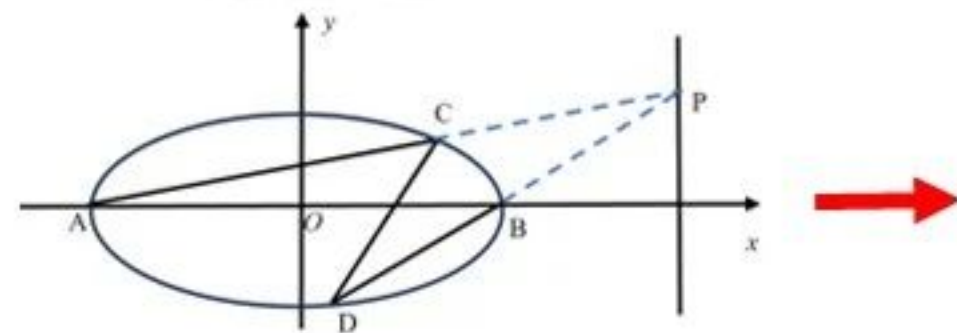
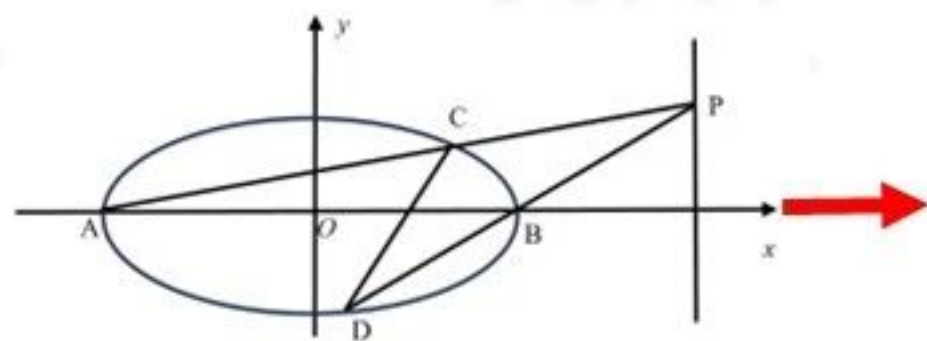
高考二轮备考研讨会研讨课：解析几何微专题

引例：1. (2020 全国I理—20) 已知 A 、 B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 的左、右顶点， G 为 E 的上顶点， $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$ ， P 为直线 $x=6$ 上的动点， PA 与 E 的另一交点为 C ， PB 与 E 的另一交点为 D 。

(1) 求 E 的方程； ($\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$)

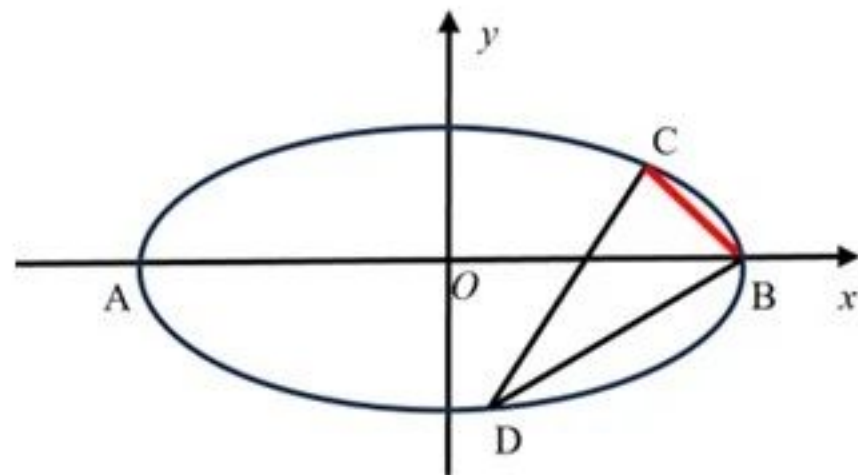
(2) 证明：直线 CD 过定点。







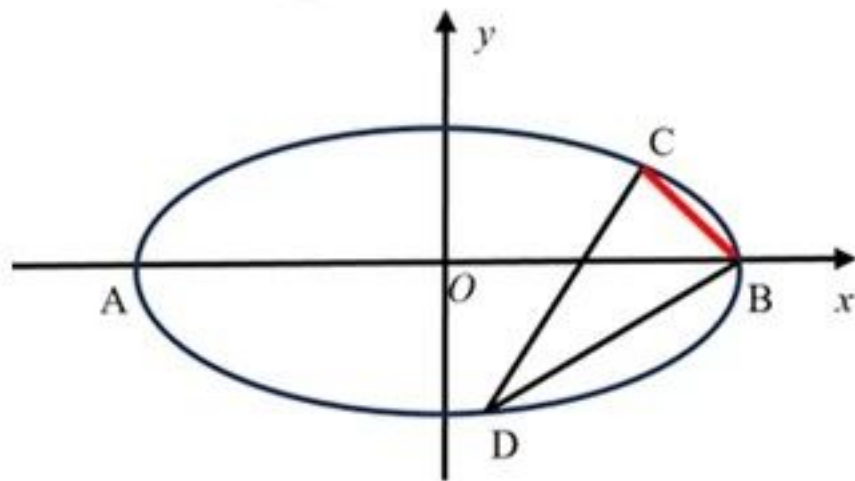
问题：2. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 的左、右两个顶点为 A, B ，点 C, D 均在椭圆 E 上， CD 不是长轴，直线 BC, BD 的斜率之积为 $-\frac{1}{3}$ ，试探究直线 AB 是否经过定点？



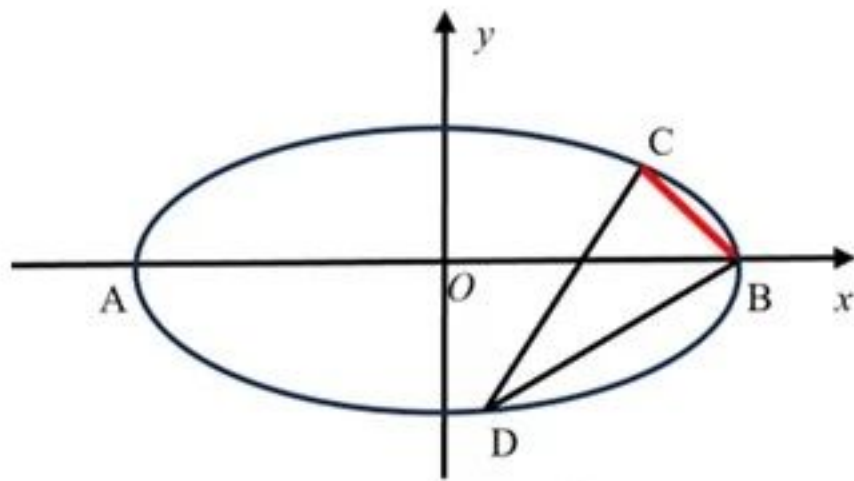


问题：3. 你还能提出什么问题？

4. 可以把这个问题一般化吗？



问题：5. 已知 A, B 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点， CD 是经过点 $M(m, 0) (m \neq a)$ 的弦，且 CD 不是长轴，记直线 BC, BD 的斜率为 k_{BC}, k_{BD} ， $k_{BC}k_{BD} = \frac{b^2(m+a)}{a^2(m-a)}$ 。





问题：6. 你还能再提出什么问题？

问题：7. 这个问题的更加一般的情形是什么？

问题：8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的，点 $A(2, 1)$ ，点 M, N 在 C 上，且 ~~$AM \perp AN$, $AD \perp MN$, D 为垂足.~~ 证明：存在定点 Q ，使得 ~~$|DQ|$ 为定值.~~ 证明：直线 MN 过定点。

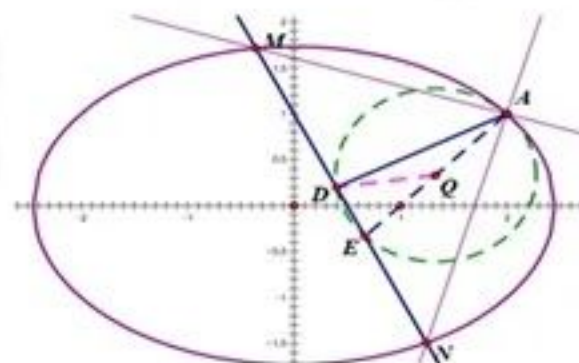


一招吃遍天下鲜

(2020新高考卷 I —22)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $A(2, 1)$. (1) 求 C 的方程: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 点 M, N 在 C 上, 且 $AM \perp AN$, ~~$AD \perp MN$, D 为垂足. 证明: 存在定点 Q , 使得 $|DQ|$ 为定值.~~ 证明: 直线 MN 过定点.



由 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 得 $[(x-2)+2]^2 + 2[(y-1)+1]^2 = 6$,

$$(x-2)^2 + 2(y-1)^2 + 4(x-2) + 4(y-1) = 0. \quad ①$$

可令直线 $MN: \boxed{m(x-2) + n(y-1) = 1}, \quad ②$

$$(x-2)^2 + 2(y-1)^2 + [4(x-2) + 4(y-1)][m(x-2) + n(y-1)] = 0$$

$$\text{整理: } (2+4n)\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2 + (4m+4n)\frac{y-1}{x-2} + (1+4m) = 0, \quad ③$$

$$k_1 + k_2 = -\frac{4m+4n}{2+4n}, \quad k_1 k_2 = \frac{1+4m}{2+4n},$$

$$\text{由 } AM \perp AN, \text{ 得 } \frac{1+4m}{2+4n} = -1 \Rightarrow 4m+4n+3=1$$

$$k_1 \cdot k_2 = \dots\dots$$

$$k_1 + k_2 = \dots\dots$$



$$k_1^2 + k_2^2 = \dots\dots$$

$$k_1 - k_2 = \dots\dots$$



$$k_1^3 + k_2^3 = \dots\dots$$

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \dots\dots$$

$$\frac{1}{k_1^3} + \frac{1}{k_2^3} = \dots\dots$$

(三) 突出思维，聚焦情境新变化

案例 情境题下的何去何从

(2023四省联考—12)

下图改编自李约瑟所著的《中国科学技术史》，用于说明元代数学家郭守敬在编制《授时历》

时所做的天文计算. 图中的 AB , AC , BD , CD 都是以 O 为圆心的圆弧, $CMNK$ 是为计算所

做的矩形, 其中 M , N , K 分别在线段 OD , OB , OA 上, $MN \perp OB$, $KN \perp OB$. 记 $\alpha = \angle AOB$,

$\beta = \angle AOC$, $\gamma = \angle BOD$, $\delta = \angle COD$, 则

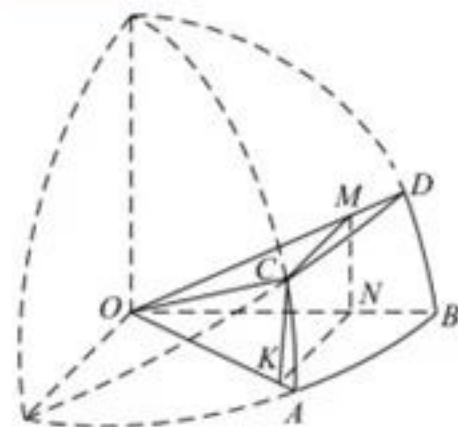
A. $\sin \beta = \sin \gamma \cos \delta$

B. $\cos \beta = \cos \gamma \cos \delta$

C. $\sin \alpha = \frac{\sin \delta}{\cos \beta}$

D. $\cos \alpha = \frac{\cos \gamma \cos \delta}{\cos \beta}$

这是考的《中国科学技术史》吗? 不是;
这是考的数学? ——当然!





案例 情境题下的何去何从

(2019全国Ⅱ理—4)

2019年1月3日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业取得又一重大成就，实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系。为解决这个问题，发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行。 L_2 点是平衡点，位于地月连线的延长线上。设地球质量为 M_1 ，月球质量为 M_2 ，地月距离为 R ， L_2 点到月球的距离为 r ，根据牛顿运动定律和万有引力定律， r 满足

方程： $\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = (R+r)\frac{M_1}{R^3}$ 。设 $a = \frac{r}{R}$ ，由于 a 的值很小，因此在近似计算中 $\frac{3a^3 + 3a^4 + a^5}{(1+a)^2} \approx 3a^3$ ，则 r 的近似值为

A. $\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}R$

B. $\sqrt{\frac{M_2}{2M_1}}R$

C. $\sqrt[3]{\frac{3M_2}{M_1}}R$

D. $\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R$

这是考的嫦娥四号吗？不是；
这是考的数学？——毋庸置疑！



案例 情境题下的何去何从

(2019全国Ⅱ理—4)

2019年1月3日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业

情境题下的何去何从

“无情境，不命题”。在高考愈加突出情境创设，突出考查学生素养水平的大背景下，学科高考备考大致有两种取向——

一是做加法，让学生见识更多的情境，补充一些跨学科的，丰富多彩的，包罗万象的情境，甚至押题猜题，文化的，生活的，社会的，科技的……

二是做减法，数学高考，是数学的高考：高考数学，考的是数学……

坚持学科立场，突出学科育人本质，教学科必备知识，教学科核心思想方法；面对非学科内部情境问题，教强烈的化归转化意识——尽快把问题转化为数学问题，然后用数学知识加以解决……

高考是用汤用碗来考药，换汤不换药，即使是换碗，也不能换碗……



等闲识得东风面

(2021新 I—22)

已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

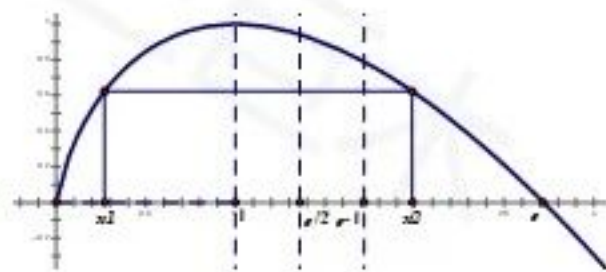
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b \ln a - a \ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$b \ln a - a \ln b = a - b$$

从条件到模型有多远?





似曾相识燕归来

(2023新 I —20)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$. 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的

前 n 项和. (1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

这个二级结论, 还有没给学生的吗?

设 $a_n = dn + a, b_n = Dn + b$, 这里用“基本量”表达有 4 个字母,

当由条件得到关系式 $\begin{cases} dD=1, \\ bd+aD=1, \\ ab=0 \end{cases}$ 后, 如何将运算推理“进行下去”:

$$\begin{cases} a=0, \\ b=D=\frac{1}{d}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b=0, \\ a=d, D=\frac{1}{d}. \end{cases}$$

$$S_{2n-1} = \frac{(a_1 + a_{2n-1})(2n-1)}{2} = (2n-1)a_n$$

$$S_{99} - T_{99} = 99$$

$$99a_{50} - 99 \cdot \frac{50^2 + 50}{a_{50}} = 99$$

$$a_{50}^2 - a_{50} - 50 \times 51 = 0$$

$$a_{50} = 51, a_{50} = -50$$

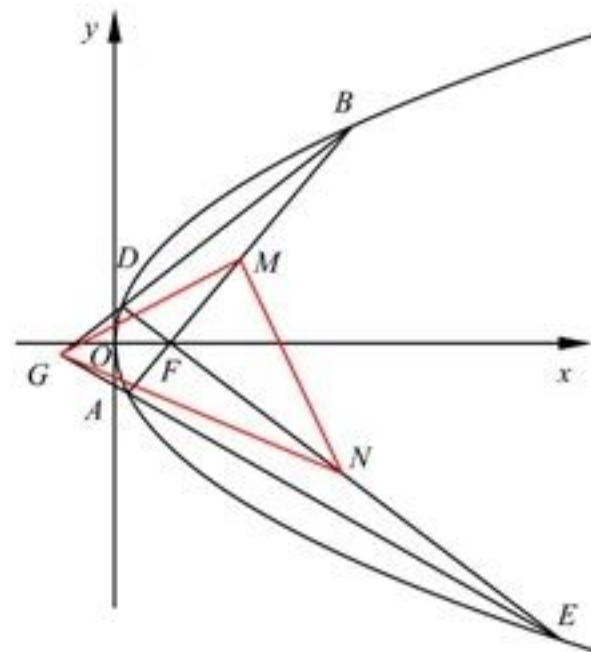
(四) 寻求突破，指导答卷精细化

(2024九省联考—18)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过 F 的直线 l 交 C 于 A, B 两点，过 F 与 l 垂直的直线交 C 于 D, E 两点，其中 B, D 在 x 轴上方， M, N 分别为 AB, DE 的中点。

(1) 证明：直线 MN 过定点；

(2) 设 G 为直线 AE 与直线 BD 的交点，求 $\triangle GMN$ 面积的最小值。



(五) 问题导向，对接考场真场景

教学目标……
核心素养……
考情分析……
真题归纳……
重点难点……
教学方法……

高三数学微专题——“隐形圆”问题

题组一 利用圆的定义(到定点的距离等于定长的点的轨迹)确定隐形圆

1. 如果圆 $(x-2a)^2 + (y-a-3)^2 = 4$ 上总存在两个点到原点的距离为 1，则实数 a 的取值范围是_____.

变式 1 定圆外的切线成定角

2. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 圆 $M: (x-a)^2 + (y-a+4)^2 = 1$. 若圆 M 上存在点 P , 过点 P 作圆 O 的两条切线, 切点为 A, B , 使得 $\angle APB = 60^\circ$, 则实数 a 的取值范围为_____.

变式 2 定圆上的定弦长的等分点到圆心距离是定值确定圆

1. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 4x = 0$ 的圆心和圆上两点 A, B 构成等边三角形, 则 AB 中点 M 的轨迹方程是()

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$ B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 3$ C. $(x+1)^2 + y^2 = 2$ D. $(x+2)^2 + y^2 = 3$

题组二



微专题的标题还要有吗——

1. 如果圆 $(x-2a)^2 + (y-a-3)^2 = 4$ 上总存在两个点到原点的距离为 1, 则实数 a 的取值范围是_____.
2. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 圆 $M: (x-a)^2 + (y-a+4)^2 = 1$.
若圆 M 上存在点 P , 过点 P 作圆 O 的两条切线, 切点为 A, B , 使得 $\angle APB = 60^\circ$, 则实数 a 的取值范围为_____.
3. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 4x = 0$ 的圆心和圆上两点 A, B 构成等边三角形, 则 AB 中点 M 的轨迹方程是()
A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$ B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 3$
C. $(x+1)^2 + y^2 = 2$ D. $(x+2)^2 + y^2 = 3$

题组
标题1

题组
标题2

题组
标题3

学生总结:

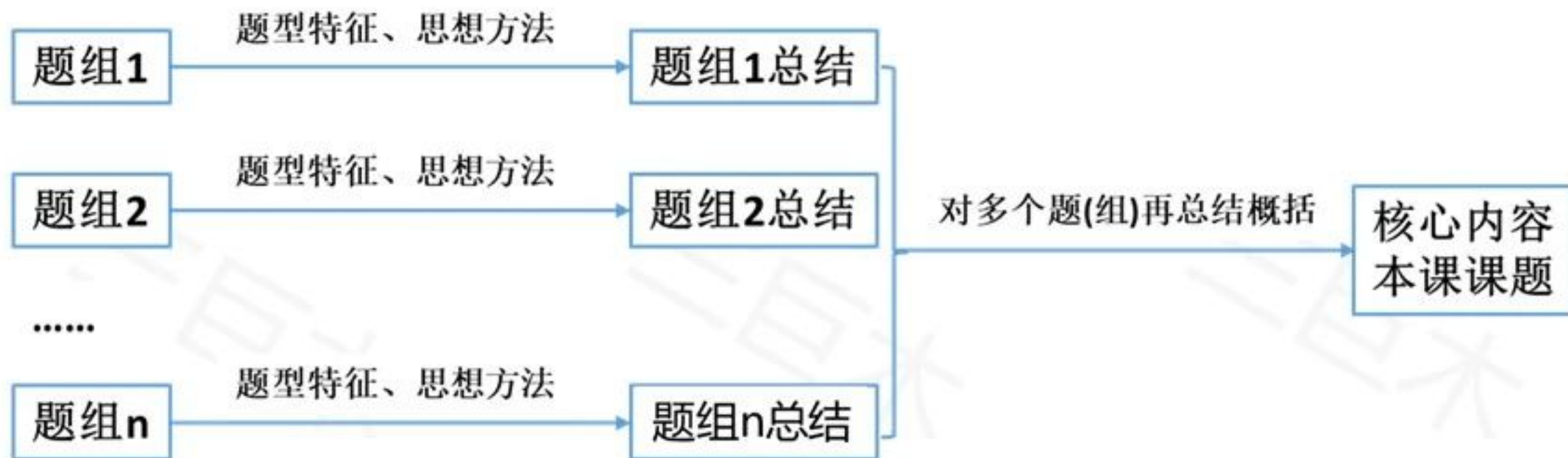
知识、方法、思想、
策略、模型、特征

专题
标题

提炼
总结



微专题的标题还要有吗——



- 标题在解决问题之后——
- 标题在学生的总结反思过程中——
- 标题在学生的心里——
- 最后点题，画龙点睛，总结概括——岂不更美哉！
- 也许不能都这样，但也可以不都那样

.....



(六) 统筹兼顾，坚持得分硬道理

刷题，必须的！

但除了刷题，还有什么？——不能只刷题。

我们已做过了多少题！——但永远有做不完的题……

你做过的题，高考中一般不会遇到；

高考考的题，你一定都做过……

高考是考试，得分是硬道理……

……



(六) 统筹兼顾，坚持得分硬道理

- 查缺补漏：错题再回顾，课本再回扣，知识再完善，方法再梳理。
- 研究高考：重点再强化，变化再研究，考点再覆盖。
- 提炼规律：题型再提炼，核心再突出，热点再聚焦。
- 考试指导：目标再强化，取舍再提醒，技巧再点拨，书写再示范。
- 调整优化：状态再保持，情绪再调整，心态再放平。



谢谢